



# FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRÁICAS BAJO LA TEORÍA DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

FACTORIZATION OF ALGEBRAIC EXPRESSIONS UNDER THE THEORY OF SEMIOTIC REPRESENTATIONS

*Laura Ximena Casas Rodríguez<sup>1</sup>*

Recepción: 06/07/2018

Aceptación: 15/11/2018

Artículo de investigación

## **Resumen**

El artículo se realiza en el marco del estudio de la Maestría en Educación Matemática, se sustenta en la teoría de representaciones semióticas propuesta por Raymond Duval, pretende proporcionar elementos que promuevan actividades cognitivas, a través del proceso de conversión y tratamiento de representaciones semióticas de la factorización de expresiones algebraicas en estudiantes de octavo grado, utilizando las representaciones que juegan un papel fundamental en el proceso de comunicación y en la construcción de objetos matemáticos. Duval (2004).

El objetivo del estudio es identificar e implementar en la clase representaciones semióticas para la factorización de expresiones algebraicas; la propuesta de investigación surge a partir de los bajos resultados en las pruebas Saber 9, la deficiencia en el componente algebraico es notable, además la falta de interés hacia el álgebra elemental se evidencia en el aula de clase. Por otra parte, se pretende fortalecer el

---

<sup>1</sup> Licenciada en matemáticas. Estudiante de maestría en Educación Matemáticas, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC). [laura.casas@uptc.edu.co](mailto:laura.casas@uptc.edu.co).



proceso de comunicación en el aula mediante representaciones semióticas ya que "las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino para el desarrollo de la actividad matemática misma". (Duval 1999, p 14).

**Palabras claves:** Factorización, expresiones algebraicas, representaciones semióticas, comunicación.

### **Abstract**

The present work is carried out in the framework of the study of the Master in Mathematical Education, is based on the theory of Semiotic representations proposed by Raymond Duval, it aims to provide elements that promote cognitive activities, through the process of conversion and treatment of semiotic representations of the factorization of algebraic expressions in eighth grade students, using the representations since they play a fundamental role in the communication process and in the construction of mathematical objects Duval (2004).

The objective of the study is to identify and implement semiotic representations in the class for the factorization of algebraic expressions; the research proposal arises from the low results in the 9th Saber tests, where the deficiency in the algebraic component is evident, also because of the lack of interest in elementary algebra. In addition, strengthen the communication process in the classroom through semiotic representations that "semiotic representations are not only essential for communication purposes, but are necessary for the development of mathematical activity itself" (Duval 1999, p 14).

**Keywords:** Factorization, algebraic expressions, semiotic representations, communication.



## Introducción

El aprendizaje de las matemáticas constituye un amplio campo de estudio para el desarrollo del pensamiento humano. El razonamiento, resolución y planteamiento de problemas, comunicación, modelación, elaboración, comparación y ejecución de procedimientos hacen de la matemática una zona de investigación con recursos amplios para su estudio; esto se enmarca en los Lineamientos Curriculares emitidos por el Ministerio de Educación Nacional, donde consideran importante destacar los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto (MEN, 1998).

De ahí que el proceso comunicativo en el aula de clase es de suma importancia por la constante interacción entre docente y estudiantes, este proceso se lleva a cabo a diario y cobra aún más valor cuándo se genera lazos de afinidad, sustentando lo anterior en que “La comunicación como proceso general es una necesidad que tenemos los seres humanos para transmitir, comentar, construir, hacer observaciones, expresar ideas hablando, conjeturas y presentar argumentos” (MEN, 1998).

Así mismo las habilidades de comunicación pueden incluir varias competencias, se puede comunicar por medio de habilidades verbales o no verbales, con el fin de construir relaciones, realizando intercambios entre las partes. También el MEN (1998) afirma que:

La comunicación juega un papel fundamental, al ayudar a los niños a construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas; cumple también una función clave como ayuda para que los alumnos tracen importantes conexiones entre las representaciones físicas, pictóricas, gráficas, simbólicas, verbales y mentales de las ideas matemáticas.

Además los sistemas de representación y de expresión juegan un papel importante en el aprendizaje de un objeto matemático por parte de los estudiantes, no solo en el proceso de la comunicación sino para el proceso y desarrollo de la actividad matemática; esto se fundamenta en que “la particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades cognitivas requieran de la utilización de sistemas de expresión y de representación distintos a los del lenguaje natural y al de las

imágenes” (Duval, 1999, p.13).

Por otra parte, es relevante describir que en el trabajo del álgebra elemental se presentan varias dificultades como lo destacan. Mason, Graham, Pimm & Gower (1999) que afirman: “No es sorprendente, tal vez, para la mayoría de las personas la experiencia algebraica, es aburridora, difícil, sin sentido y confusa” (p.4). Además, el paso del lenguaje aritmético a un lenguaje algebraico, o como lo mencionan los autores “aritmética generalizada” forja en los estudiantes una brecha entre la aritmética y el álgebra.

Así pues, el docente en la enseñanza del álgebra pretende que el estudiante identifique algún patrón en búsqueda de la generalización. Esta debe ser concretada mediante registros que pueden ser palabras que apoyan las figuras, sólo palabras, palabras y símbolos o sólo símbolos, estas ideas de registros introducida por Mason et al. (1999) se relaciona directamente con la teoría de representaciones semióticas haciendo referencia a “Todo acceso a los objetos matemáticos (números, funciones...) pasa necesariamente por las representaciones semióticas. Sin embargo, no se puede confundir nunca un objeto matemático y su representación, el objeto puede tener otras tantas representaciones diferentes de las que uno ve” (Duval, 1999).

De esta forma se lleva a cabo una investigación cuyo objetivo es identificar e implementar en el aula de clase diferentes representaciones semióticas presentes en la factorización de expresiones algebraicas. Se pretende que las diferentes representaciones puedan ser un elemento para mejorar el dominio del álgebra elemental, además favorecer el proceso de comunicación matemática.

La investigación se enmarca en el paradigma interpretativo ya que en este pretende la comprensión y búsqueda de significados, además el investigador está en constante interacción con el objeto investigado. El objeto de análisis es difuso, es cambiante, es difícil de aprehender, entonces la relación sujeto objeto no debe ser distante, debe estar interrelacionado, buscar la manera de llegar al objeto (Corbetta, 2007).

## Marco teórico

El trabajo de investigación está sustentado en la teoría de representaciones semióticas que propone Duval (2016). En uno de los



escritos del autor afirma que “Las representaciones pueden ser signos y sus asociaciones complejas, que se producen de acuerdo con reglas y que permiten la descripción de un sistema, un proceso, un conjunto de fenómenos” (p.7). Además, las representaciones juegan un papel fundamental en el proceso de comunicación y en la construcción de objetos matemáticos. En este sentido se aborda la definición de representación desde distintas perspectivas, se describen registros semióticos de representación de la factorización de expresiones algebraicas; trinomio cuadrado perfecto, definiciones sobre algebra elemental y expresiones algebraicas y finalmente la comunicación como mediador entre registros de representación.

### *Teoría de las representaciones semióticas*

Las representaciones se han utilizado a lo largo de la historia en tres ocasiones distintas, la primera es por parte de Piaget hacia los años 1924-1926, empleando las representaciones mentales como representaciones del mundo de los niños; luego entre 1955-1960 aparece la idea de las representaciones internas computacionales, que buscan describir información y poner en manifiesto un sistema de transformación, se trata de una codificación de la información; y finalmente hacia 1985 aparecen las representaciones semióticas, en el marco de los trabajos de conocimientos matemáticos y sobre problemas de aprendizaje de esta rama, empleando especialmente un sistema particular de signos que se pueden ver como representaciones equivalentes (Duval, 1999). En esta última noción de representación se centrará el estudio realizado.

De esta manera se pone de manifiesto que el proceso de aprendizaje de las matemáticas contiene cierto nivel de dificultad. Duval (2016) afirma que:

Los procesos de adquisición del conocimiento matemático son tan complejos que parece ser necesario tener diferentes enfoques. Los más predominantes, y a veces opuestos, son el enfoque epistemológico y el educativo. Pero ellos tienen en común el uso de la noción de representación para caracterizar el tipo de fenómenos que ocurren. (p. 61)

Así mismo en el campo del aprendizaje de las matemáticas se involucran el análisis de las actividades cognitivas. Las representaciones semióticas son un sistema particular de signos necesarios para la

conceptualización de los procesos cognitivos, además estos procesos requieren la utilización del lenguaje natural, los esquemas, las figuras geométricas, los gráficos cartesianos o las tablas. Duval (1999) menciona que “estos sistemas de representación son diferentes entre sí; cada uno plantea preguntas específicas sobre el aprendizaje”; en relación con lo anterior considero que estos sistemas hacen parte fundamental en el proceso cognitivo que realiza el estudiante en busca del aprendizaje.

En el desarrollo de la actividad cognitiva del estudiante se emplean distintos registros de representación, aparte del lenguaje natural y los símbolos. Las transformaciones del registro de representación que se realizan son el tratamiento y la conversión. Así pues, se hace referencia al tratamiento como “la transformación de una representación (inicial) en otra representación terminal, respecto a una cuestión, un problema o una necesidad” (Duval, 1999, p.42). Es decir que cuando se habla de tratamiento, la transformación produce otra representación dentro del mismo registro; Así mismo la conversión es “la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada de un registro, es una representación del mismo objeto o de misma información en otro registro” (Duval, 1999, p.44). En efecto la conversión es el cambio de registro sin cambiar el objeto.

En relación con lo anterior, Duval & Sáenz, (2016) clasifican los registros que se pueden movilizar en los procesos matemáticos, empleado el tratamiento y la conversión para tal fin.

Un aspecto importante para resaltar en las conversiones es que puede ocurrir que no suceda de manera inmediata, ni con facilidad, esto puede explicarse desde la congruencia o no congruencia entre los registros. Duval (2016) afirma que:

En algunos casos, es como si hubiera una correspondencia uno a uno y la representación fuente fuera transparente para la representación de llegada. En estos casos, la conversión no parece ser más que una simple codificación, pero en otros casos no sucede así. En otras palabras, puede o no haber congruencia entre una representación fuente y su representación convertida dentro de un registro de llegada. (p.17)



## ***La comunicación en Matemáticas***

La clase de matemáticas desde generaciones anteriores ha sido designada como difícil y aburridora, por tal razón el profesor tiene la tarea de cambiar ese paradigma. Por su parte Jiménez, Suarez & Galindo (2010) hacen referencia a que “Convertir la clase de matemáticas en algo significativo es, sin lugar a dudas, uno de los grandes desafíos de los profesores y de los investigadores en educación matemática” (p.177). De ahí que la interacción con los estudiantes es parte fundamental del proceso comunicativo e investigativo que se debe generar en el aula de clase.

Según lo anterior, la comunicación es indispensable para la interacción con las personas, también se hace necesaria en la orientación de un conocimiento matemático. Ahora bien, se debe tener en cuenta las prácticas culturales, el contexto y en sí la actividad que realiza la comunidad en general, para así lograr captar lo que se quiere transmitir, esta idea se sustenta según (ídem) afirmando que “La influencia del contexto está relacionada con el ambiente de trabajo escolar y social, la organización y el funcionamiento de la escuela, los recursos existentes y las expectativas de los padres y la comunidad” (p.177).

La comunicación es considerada como un proceso de interacción social, en esta, los consensos, el dialogo o los debates siempre están presentes, según Ponte et al. (1997), la comunicación se refiere a la interacción entre los diversos sujetos que hay en una clase, empleando un lenguaje propio, que es una mezcla del lenguaje cotidiano y del matemático. Citado por (Jiménez Suarez & Galindo, 2010 p.180)

## **Metodología**

En cuanto a los aspectos relacionados con la metodología de esta investigación, se hace una breve descripción de las fases, características metodológicas generales e instrumentos necesarios para la recolección de la información.

La investigación se divide en dos fases. La primera es la fase cuyo objetivo es problematizar la dificultad que genera el paso de aritmética la algebra de los estudiantes de grado octavo. La segunda es la realización y aplicación de una situación de enseñanza basada en la representación de registros semióticos y reflexión sobre el resultado luego de realizar la situación.

Inicialmente, realizando un estudio de la teoría de los registros de representaciones semióticas que propone Duval. Por otra parte, se planteó una entrevista de tipo semiestructurado con el fin de saber las concepciones que los estudiantes tienen acerca de la aritmética y del álgebra, además se hace proceso de observación a la clase de matemáticas por parte del directivo docente de la Institución Educativa.

Así mismo se realiza una prueba diagnóstica con el fin de identificar las dificultades reales que presentan los estudiantes, luego diseño, realización e implementación de situaciones didácticas con base en las representaciones semióticas, además con aplicación de talleres fundamentados en esta teoría para así lograr la generalización e institucionalización del conocimiento.

## Resultados

A continuación, se da a conocer los resultados parciales obtenidos luego de la aplicación de la secuencia de enseñanza a los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Agropecuaria el Escobal en el municipio de Ramiriquí del departamento de Boyacá.

La situación de enseñanza que se realizó se divide en cuatro fases de la siguiente manera.

### *Fase 1 Identificación*

En una finca se sembraron tres productos agrícolas, esta finca se puede representar por medio de una figura geométrica cuya medida de los lados es congruente. Además, esta parcelada en cuatro partes.

Dibuje figuras geométricas que cumplan esta condición.

Los estudiantes realizaron las siguientes representaciones

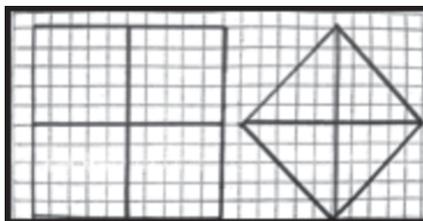


Figura 1: Representación gráfica del estudiante



**Figura 2:** Representación gráfica del estudiante E2

En la figura 1 se evidencia que el estudiante pretende hacer dos figuras diferentes, pero podría llegar a ser la misma con la realización de una rotación, la división de las cuatro parcelas es diferente, en una de las gráficas une los puntos medios de los lados opuestos y en otro caso traza las diagonales de la figura en este momento el estudiante hace el paso del lenguaje natural al lenguaje gráfico o geométrico, siguiendo un patrón dado. Con respecto a la figura 2 se muestran cuatro representaciones, un cuadrado, un paralelogramo, un octágono y un triángulo. A diferencia de la representación número 1, ésta no hizo la división de las cuatro parcelas, además la única figura que tiene todos los lados congruentes es el cuadrado. De esta manera los estudiantes están pasando del lenguaje natural al lenguaje gráfico, pero no de la manera como se esperaba ya que los figuras no cumplen las condiciones transmitidas. En este instante se puede concluir que se está realizando la actividad cognitiva denominada conversión.

La segunda fase se denominó simbolización.

### ***Fase 2 Simbolización***

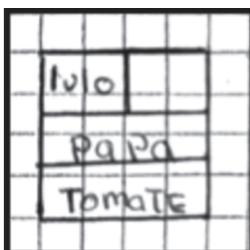
Las cuatro partes en las que se parcela la finca están divididas de la siguiente manera.

El área de dos partes de terreno donde se sembró tomate es igual al área que ocupa el cultivo de papa, que es la parcela más grande. Un cuarto del área del cultivo de papa o la mitad de una parcela del cultivo de tomate es equivalente al área de la parcela del cultivo de lulo.

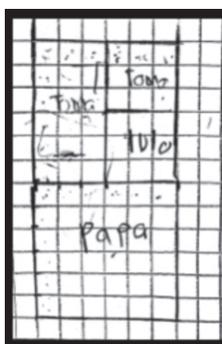
Se realizó la representación gráfica de la descripción anterior. Todas las opciones que se consideraron posibles.

En esta fase los estudiantes mostraron un poco más de temor por la realización del registro geométrico ya que exigía concentración y esto se evidenció en las manifestaciones que realizaron “no entiendo” “esto está

*muy difícil*” “*profe explíqueme*” “*no le entendí profe*” “*no profesora, no puedo*”. Con tal sorpresa para ellos, que la única respuesta encontrada fue “en la hoja esta toda la información, y realice lo que usted considere correcto”. De la fase se revelan las siguientes respuestas.



**Figura 3:** Representación gráfica del estudiante E3



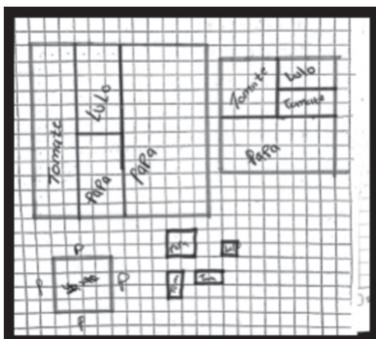
**Figura 4:** Representación gráfica del estudiante E4

En las representaciones anteriores se evidencia que los estudiantes no lograron concretar una gráfica que represente adecuadamente la situación planteada, generan algunas opciones en las cuales coinciden con parte del texto enunciado, como lo son en las figuras 3 y 4, que los estudiantes representan la parcela de papa como la más grande y en la figura 4 realizan la parcela de lulo como media parcela del tomate, además es equivalente a un cuarto de la parcela de papa.

### ***Fase 3 Socialización***

Reúnase con un compañero, compare las representaciones gráficas, argumente ¿Por qué las considera adecuadas?, escojan una sola representación. Justifiquen la razón de haberla escogido.

Luego de la socialización los estudiantes logran concretar algunas ideas y las plasman en las siguientes figuras.



**Figura 5:** Representación gráfica por parte de un grupo



**Figura 6:** Representación gráfica del cultivo por parte de un grupo

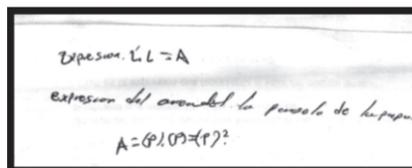
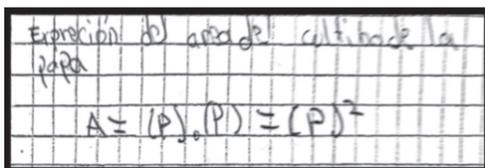
En una de las conversaciones entre los estudiantes manifestaron que la figura que representa el terreno cultivado es un cuadrado, y tenía que ser la parcela con mayor área, ya que se adelantaron a la parte cuarta de la secuencia, esta cuarta parte se denominó análisis y consiste en consolidar los conceptos de área y perímetro, con el fin de que los estudiantes concretaran y realizaran la institucionalización del conocimiento.

#### ***Fase 4 Análisis***

Sí la medida de un lado de la parcela del cultivo de papa es  $(p)$ , además es un cuadrado ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la parcela?

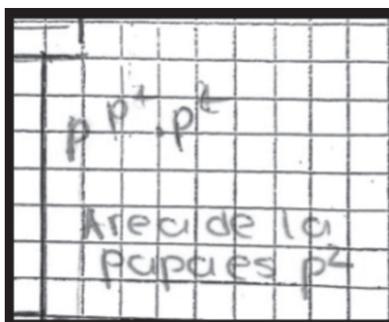
**Figura 7:** Representación algebraica del área del cultivo de papa que realizaron dos grupos

Los estudiantes en esta etapa logran concretar la expresión



algebraica que representa el valor del área del cultivo de papa, de esta manera se puede afirmar que los estudiantes realizan el proceso cognitivo de conversión, hacen el paso del registro de representación a otro. Aunque no todos logran realizar este proceso, como se evidencia en las siguientes respuestas obtenidas.

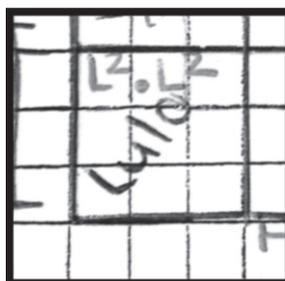
Se evidencia que el estudiante posee un conflicto cognitivo y confunde el área con el perímetro, esto en el primer caso, enuncia que  $p^4 \cdot p^4$  y concuye que área de papa es  $p^2$ .



**Figura 8:** Representación algebraica del área del cultivo de papa

Un lado del cuadrado donde está sembrado el lulo mide (l). ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área del cultivo de lulo?

Los estudiantes muestran varias opciones para la representación algebraica del área del cultivo de lulo, entre estos se destacan los siguientes.



**Figura 9:** Representación algebraica del área del cultivo de lulo



En esta representación, los estudiantes no logran realizar el proceso correcto, escriben la expresión algebraica  $L^2 \cdot L^2$ , que representa el área del cultivo de lulo. En este caso el estudiante no realiza el paso del registro gráfico al registro algebraico. No hay proceso cognitivo de conversión.

En la representación gráfica se muestra el área de cada una de las parcelas del cultivo.

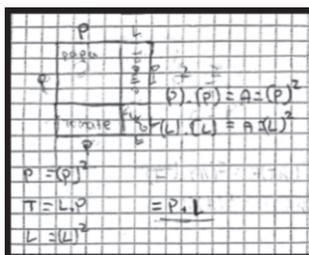


Figura 10: Representación algebraica del área del cultivo de lulo, papa y tomate

¿Cuál es la expresión que representa el valor del lado del terreno?



Figura 11: Representación algebraica del área del lado del cultivo

Los estudiantes logran comprender y escribir la expresión algebraica que representa el lado de la parcela, por lo tanto, en este caso si se logra la realización del proceso cognitivo de conversión, al pasar de registro gráfico a algebraico.

Se evidencia que los estudiantes logran la conversión del registro, nombran cada lado con la expresión que los representa.

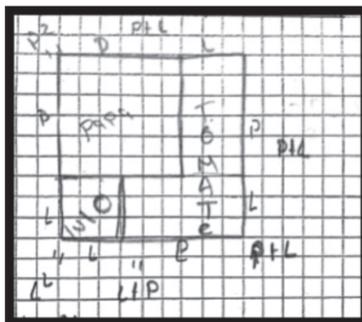


Figura 12: Representación algebraica del área del lado del cultivo

Qué más procedimientos podría realizar?

Como contaban con todos los datos y las representaciones algebraicas del área de cada parcela, los estudiantes escribieron:

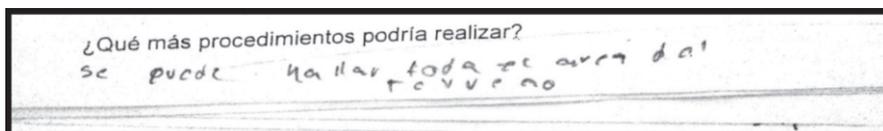


Figura 13: Respuesta a la pregunta, sobre los procedimientos que creía se podría realizar.

Además, muestran los siguientes procedimientos.

En este grupo los estudiantes escriben procedimientos adecuados, hasta el momento de realizar la multiplicación de los binomios, pero fallan en el momento de realizar la adición de los términos semejantes del polinomio resultante

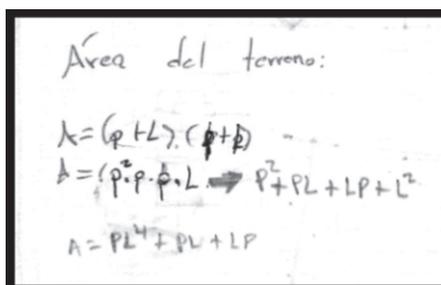


Figura 14: Expresión algebraica que representa el área de terreno

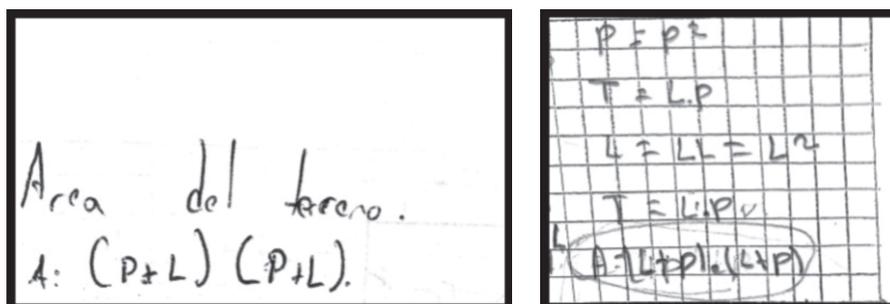


Figura 15: Expresión algebraica que representa el área de terreno



## Conclusiones

Los estudiantes demuestran temor al enfrentarse a una situación diferente ya que en clase de matemáticas no se había realizado algo similar, se ven obligados a poner a disposición sus conocimientos previos, por otra parte, el hecho de trabajar en grupo hace que el estudiante defienda con argumentos las actividades que el realiza y, además, debe someterse a ser corregido por su propio par, asimismo logran apoyarse en el compañero y sacar conclusiones que probablemente solos no hubieran logrado. Existe confianza entre ellos y el miedo a equivocarse disminuye.

Los cuatro grupos de trabajo lograron concretar la representación algebraica del área del terreno, pero no se evidencia que realicen el proceso cognitivo de tratamiento, ya que no logran acertar en la multiplicación y en el caso anterior la realizan, pero no hacen correctamente la adición de monomios semejantes presentes en el polinomio.

Finalmente, se destaca que dos de los grupos llegaron al proceso final que se pretendía con la actividad y se resalta que todos los estudiantes intentaron pasar de un registro a otro, lo que quiere decir, que han logrado la conversión de registros de representación semiótica.

## Referencias

- Corbetta, P., (2007). Metodología y técnicas de investigación social. Aravaca España: Mcgraw-hill/interamericana de España.
- D'Amore, B., Fandiño, M., & Lori, M. (2013). La semiótica en la didáctica de la matemática. Bogotá DC, Colombia. Magisterio.
- Duval, R. (1999). Semiosis y Pensamiento Humano, traducido por Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali Colombia: Artes Gráficas Univalle.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9(1), 143-168.
- Duval, R., & Sáenz-Ludlow, A. (2016). Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas (pp. 1-264). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Moll, V. F. (2012). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas, 47-78.

- Jiménez A., Suárez, N., & Galindo, S. (2010). La comunicación: eje en la clase de matemáticas. *Práxis & Saber*, 1(2).
- Mason, J., Graham, A., Pimm, A., & Gowar, N., (1999). Rutas y raíces del y hacia el álgebra, traducido por Cecilia Agudelo Valderrama. Tunja Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

---

**Forma de citar este artículo:** Casas, L. X. (2018). Factorización de expresiones algebraicas bajo la teoría de representaciones semióticas. *Voces y Realidades Educativas*, (2), 129-144.

---