



ANÁLISIS DE LOS CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS, UTILIZADOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CONVENCIONALES DE TRIGONOMETRÍA

ANALYSIS OF THE CONCEPTS AND PROCEDURES USED IN SOLVING CONVENTIONAL TRIGONOMETRY PROBLEMS

*Arley Zamir Chaparro Cardozo¹
Raúl Hernán Martínez Piña²*

Recepción: 04/01/2021
Aceptación: 20/05/2021
Artículo de investigación

Resumen

Se presentan los resultados de una investigación, desde el enfoque de resolución de problemas en trigonometría, con la cual se buscó comprender, mediante un diagnóstico, los procesos de aprendizaje de un grupo de estudiantes de grado décimo. La prueba se realizó en un ambiente de estudio, en modalidad de enseñanza remota, por motivo del confinamiento obligatorio, como consecuencia del COVID-19. El análisis del estudio se realizó teniendo, como referente teórico, el

- 1 Estudiante de Doutorado em Educação Matemática-Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, miembro del grupo de Investigación PIRAMIDE en la línea de Semiótica y Comunicación (UPTC), Colombia; Miembro del Grupo de Investigación en Fenomenología de la Educación Matemática (FEM) del Departamento de Educación Matemática de la UNESP. arley.chaparro@uptc.edu.co. ORCID iD <https://orcid.org/0000-0002-1639-0184>
- 2 Ingeniero electrónico, estudiante de Maestría en Educación Matemática. Docente de matemáticas en la Institución Educativa San Isidro (Saboyá, Colombia). raul.martinez04@uptc.edu.co



modelo de análisis para la resolución de problemas, propuesto por Allan Schoenfeld. Metodológicamente, la investigación realizó un análisis mixto, con el propósito de comprender el nivel de solución que plantea un estudiante cuando busca resolver un problema en contexto matemático o extramatemático. Dentro de los resultados, se destaca que la dificultad para obtener una solución completa y clara radica en la aplicación incorrecta de los elementos, teoremas y leyes de la trigonometría, en conjunto con la inadecuada manipulación algebraica, aritmética y de las herramientas, como la calculadora, el transportador, la escuadra, entre otros.

Palabras clave. Rendimiento escolar, evaluación del estudiante, trigonometría, resolución de problemas.

Abstract

This article presents the results of a research developed from the problem-solving approach in trigonometry, which sought to understand, through a diagnosis, the learning processes of a group of tenth grade students. The test was carried out in a study environment, in remote teaching mode, due to mandatory confinement, as a consequence of COVID-19. The analysis of the study was carried out having, as a theoretical reference, the analysis model for problem solving, proposed by Allan Schoenfeld. Methodologically, the research carried out a mixed analysis, with the purpose of understanding the level of solution posed by a student when he seeks to solve a problem in a mathematical or extra-mathematical context. Among the results, it is highlighted that the difficulty to obtain a complete and clear solution lies in the incorrect application of the elements, theorems and laws of trigonometry, together with the inadequate algebraic, arithmetic and tools manipulation, such as the calculator, the transporter, the square, among others.

Keywords. School performance, student assessment, trigonometry, problem solving.



Introducción

El presente artículo es parte de una investigación más amplia, que busca determinar las estrategias que los estudiantes diseñan y aplican al enfrentarse a situaciones en contextos matemáticos y extramatemáticos, que requieren del análisis de triángulos; en razón a esto, se presentan los resultados, a nivel diagnóstico, del desempeño y las estrategias que, frecuentemente, usa un grupo de estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa “San Isidro” de Saboya (Boyacá), cuando resuelven problemas que aparecen propuestos en libros de texto convencionales de trigonometría.

El sistema educativo considera que para los estudiantes de básica y media, las matemáticas tienen el fin de contribuir con la formación integral del alumno, encaminándolo a aplicar conocimientos y utilizar las competencias matemáticas fuera del ámbito escolar. Con esta visión en Colombia, en los Lineamientos (MEN, 1998), se propone organizar el currículo de matemáticas, con la consideración de tres grandes aspectos: los procesos generales, los conocimientos básicos y los contextos.

Para esta investigación, se consideran relevantes los contextos y los procesos generales, especialmente la resolución y planteamiento de problemas, un objetivo primario en la enseñanza de las matemáticas, pues las investigaciones al respecto han mostrado que los estudiantes que dominan este proceso van adquiriendo confianza en el uso de las matemáticas y aumentan la capacidad de comunicarse matemáticamente (MEN, 2006).

Las investigaciones que reconocen la resolución y planteamiento de problemas, como trabajo importante para aprender matemáticas, sugieren que la formulación de las situaciones problemáticas debe estar en contextos matemáticos y extramatemáticos que permitan aplicar diversas estrategias, promover la verificación e interpretación de los resultados obtenidos y, por último, que el estudiante logre generalizar la solución y la estrategia en nuevos problemas; además, como valor agregado incentivar la confianza en el uso significativo de las matemáticas (Santos, 2015).

Son muchos los autores que en materia de resolución de problemas matemáticos hacen énfasis en que la propuesta de un proceso para abordar la solución de un problema apareció en el año 1945, con el trabajo de George Pólya. Luego, retomada por Allan Schoenfeld, en 1987, para mejorarla, pero la verdad es que esta temática ha sido abordada por



varios autores, comenzando desde la antigüedad con los filósofos griegos Sócrates y Platón, en la edad media con los árabes Al Juarisme y Al Batani, en la época moderna con el filósofo y matemático francés Rene Descartes, el suizo Leonhard Euler y el francés Joseph-Louis Lagrange (Sigarreta et al., 2006).

En la propuesta de Pólya (1957), para resolver un problema se deben tener en cuenta cuatro fases: comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva. Para cada fase, se requiere utilizar el razonamiento heurístico, entendido según Pólya, como una serie de preguntas que el estudiante se puede formular o aspectos que puede considerar para ir encontrando el camino que lo lleve al fin que se ha propuesto (MEN, 1998).

Schoenfeld (1992) quien realizó sus investigaciones, con posterioridad a Pólya, encontró que las heurísticas solas no son suficientes para la resolución de un problema, sino que se deben considerar otros factores, como el dominio del conocimiento, las estrategias cognoscitivas, las estrategias metacognitivas y el sistema de creencias. Además, Schoenfeld sugirió que es importante que los estudiantes reflexionen, constantemente, sobre los diferentes aspectos que van apareciendo en cada fase de la resolución y que los elementos de discusión deben incluirse, principalmente, en cuatro etapas: análisis, exploración, ejecución y verificación de la solución (Santos, 2015).

En MEN (1998) se propone que el docente tenga en cuenta algunos aspectos que aparecen comúnmente, cuando los estudiantes resuelven una situación problemática, como: descubrir los datos y las relaciones explícitas o implícitas entre ellos, crear posibilidades para modificar y simplificar el problema, construir modelos gráficos o simbólicos para las relaciones entre los datos, identificar el problema particular dentro de otro más general, y razonar recurriendo a analogías.

Cuando los estudiantes realizan el planteamiento o resolución de problemas, se hace necesario precisar y clasificar las dificultades que ellos muestren, entre las que se pueden encontrar: dificultades en la comprensión del problema, deficiencia en el conocimiento matemático para abordarlo, errores en el momento de aplicar los procesos algorítmicos, pero también puede ser que la solución se vea afectada por las actitudes sociales, culturales o emocionales, ya sea hacia las matemáticas o hacia el enunciado del problema (MEN, 2006).



Metodología

La investigación se enmarca en el paradigma de investigación mixto, pues busca, a partir de la complementariedad de información tanto cuantitativa como cualitativa, comprender el nivel de solución que plantea un estudiante, cuando busca resolver un problema en contexto matemático o extramatemático; en este sentido, es necesario precisar que este enfoque comprensivo de la naturaleza del conocimiento, derivado de la investigación, requiere de un predominio de análisis de tipo cualitativo (Campos, 2009).

El alcance de esta investigación es de carácter exploratorio y un estudio de caso, donde se busca conocer un fenómeno educativo específico, que no tiene pretensión de generalización de sus resultados, sino que, a partir de éstos, se busca comprender los procesos de aprendizaje de un grupo de estudiantes, lo cual permitirá orientar nuevas estrategias didácticas.

La investigación completa se diseña en tres fases: diagnóstica, aplicación y contrastación, las cuales se correlacionan con los objetivos específicos planteados. Sin embargo, en el presente artículo se muestra el diseño para la primera fase, la cual tiene un alcance descriptivo, donde se busca conocer el estado actual de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, en los que se indaga sobre los procesos generales, asociados a la comunicación, modelación y resolución de problemas, y en éstos el uso y apropiación de nociones conceptuales, y el desarrollo de estrategias en situaciones problema convencionales, que se abordan en el contexto escolar por medio de libros de texto usuales en el aula.

El estudio fue realizado en la Institución Educativa “San Isidro”, la cual está ubicada en el sector rural de la vereda Puente de Tierra del municipio de Saboyá (Boyacá). La unidad de análisis estuvo conformada por 16 estudiantes del grado décimo, el cual corresponde a un nivel de escolaridad nacional de educación básica, quienes están en un rango etario de 15 a 17 años. Adicionalmente, la investigación contempla consideraciones éticas frente a la participación de los estudiantes. Se permitió que fuese de forma voluntaria y contando con el permiso tanto de la Institución, como de los acudientes de los estudiantes.

Instrumentos para análisis de información

El principal instrumento de recolección de información fueron dos cuestionarios semánticos con problemas en contextos matemáticos



y extramatemáticos, que contenían situaciones problemáticas de la trigonometría, frecuentes en los libros de texto, validados mediante juicio de expertos y pruebas piloto.

La prueba contenía dieciocho situaciones problema, doce en contexto extramatemático y seis en contexto intramatemático, con respecto a la asignatura de Trigonometría y al grado que cursaban los estudiantes. Los problemas se repartieron de forma que las dieciséis pruebas fueran, en lo posible, diferentes.

A cada estudiante le correspondió resolver seis problemas. En la tabla 1 se presenta una descripción de la forma como se asignaron los problemas a cada estudiante.

Tabla 1.

Descripción de la forma como se asignaron los problemas a cada estudiante

	Contexto extramatemático
Problema 1	Implica un triángulo rectángulo
Problema 2	Implica dos triángulos rectángulos
Problema 3	Implica un triángulo no rectángulo
	Contexto intramatemático
Problema 4	Involucra, por lo menos, un triángulo rectángulo
Problema 5	Involucra, por lo menos, dos triángulos rectángulos
Problema 6	Involucra un triángulo no rectángulo

Fuente: elaboración propia

Los problemas fueron diseñados por los autores, teniendo en cuenta los modelos de ejercicios que se abordan los libros de texto. Un ejemplo de problema en contexto extramatemático, que implicaba un triángulo no rectángulo, es el siguiente:

Problema 10: En la ciudad de Chiquinquirá hay tres templos, la Basílica es marcada como el punto A, la Catedral el punto B y la Iglesia del Divino Niño, como el punto C. Se trazan tres líneas rectas entre estos tres templos. La Basílica, que se encuentra entre los otros dos templos, tiene un ángulo de ciento un grados, y la distancia a la Catedral es de trescientos veintidós metros, y la distancia a la iglesia del Divino Niño es de ochocientos cuarenta y cinco metros. ¿Cuál es la distancia entre la Iglesia y la Catedral?



Para el contexto intramatemático, un ejemplo de problema, que implicaba un triángulo no rectángulo, es el siguiente:

Problema 17: Un pentágono regular está inscrito en una circunferencia de veinte centímetros de radio. ¿Cuál es la medida de su lado?

Esta prueba se diseñó a partir de las competencias establecidas en ICFES (2019) y el eje de conocimiento geométrico que usa la Prueba Saber 11³.

El nivel de desempeño, que obtiene el estudiante al presentar la prueba, se clasificó en cuatro niveles, teniendo en cuenta la descripción cualitativa de los conocimientos y habilidades mostradas en la solución. Para ubicarse en cierto nivel, se debía cumplir los descriptores que se resumen en la Tabla 2.

Tabla 2.

Descripción cualitativa de las habilidades y conocimientos que podría tener un estudiante al ubicarse en uno de los cuatro niveles al presentar la prueba.

Nivel de desempeño	Descripción
1	El estudiante, que se ubica en este nivel, probablemente, puede leer información puntual, presentada en gráficas con escala explícita, pero puede tener dificultades al comparar distintos conjuntos de datos, involucrar diferentes variables o analizar situaciones alejadas de su vida diaria.
2	El estudiante, que se ubica en este nivel, es capaz de comparar datos de dos variables, presentadas en una misma gráfica, sin necesidad de hacer operaciones aritméticas. Identifica valores o puntos representativos en diferentes tipos de registro a partir del significado que tienen en la situación. Toma decisiones sobre la veracidad o falsedad de una afirmación, cuando esta se puede explicar verbalizando la lectura directa que se hace de la información.

³ Es una prueba estandarizada, aplicada a los estudiantes que se encuentran en último grado de educación secundaria en Colombia, con el fin de otorgarles resultados oficiales, que les permitan acceder a la educación terciaria.



3	El estudiante, que se ubica en este nivel, compara información gráfica que requiere algunas manipulaciones aritméticas. Señala información representada en formatos no convencionales (mapas o infografías). Reconoce desarrollos planos de una forma tridimensional, y viceversa. Selecciona información necesaria para resolver problemas que involucran características medibles de figuras geométricas elementales (triángulos, cuadriláteros y circunferencias). Cambia la escala cuando la transformación no es convencional.
4	El estudiante, que se ubica en este nivel, resuelve problemas que requieren construir una representación auxiliar (gráficas y fórmulas) como paso intermedio para su solución. Modela, usando lenguaje algebraico, información dada en lenguaje natural, tablas o representaciones geométricas. Toma decisiones sobre la veracidad o falsedad de una afirmación, cuando requiere el uso de varias propiedades o conceptualizaciones formales.

Fuente: elaboración propia con información presentada en ICFES (2019).

El otro instrumento, diseñado para analizar la prueba diagnóstica, tiene en cuenta aspectos presentados en Santos (2015). Con el mismo se realizó un análisis cualitativo de las soluciones, utilizando el modelo de Allan Schoenfeld. Se observan los procesos cognitivos, tales como análisis, exploración, ejecución y comprobación de la solución obtenida.

Resultados

La prueba se realizó de forma remota, casi sincrónica, utilizando una de las plataformas digitales de mensajería instantánea, que los estudiantes tenían a su disposición, debido a las medidas de confinamiento obligatorio, adoptadas por el Gobierno Nacional para controlar la pandemia producida por COVID-19.

Con el material recopilado de la prueba, se realizó el análisis de la resolución de problemas a partir del instrumento presentado en la Tabla 2, el consolidado de la cantidad de soluciones que se encuentran en cada nivel, para cada problema, en cada contexto, se presenta en las Figuras 1 y 2.

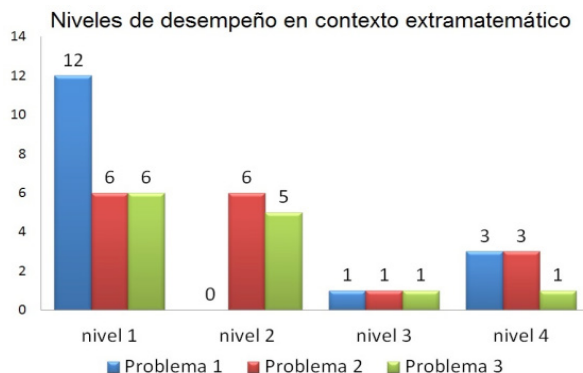


Figura 1. Niveles de desempeño en contexto extramatemático

De la Figura 1, se puede observar que la mayoría de las soluciones se ubicaron en el nivel 1 y 2, en todos los tres tipos de problema, y que tan solo casi la quinta parte lograron el nivel 4, en los problemas que tienen que ver con la solución de triángulos rectángulos, y solo una de las soluciones logró este nivel, con el problema de triángulos no rectángulos. Tres soluciones lograron el nivel 3, uno en cada problema diferente.

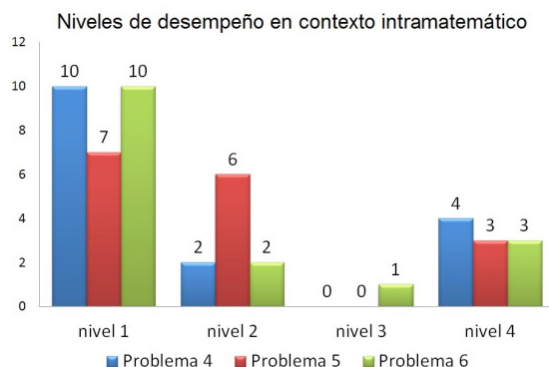


Figura 2. Niveles de desempeño en contexto intramatemático

De la Figura 2, se observa que las tres cuartas partes de las soluciones se ubicaron en el nivel 1 y 2, en el problema 5 se ubican más soluciones en el nivel 2. Tan solo una solución se ubicó en el nivel 4, en el problema 6. La otra cuarta parte de los estudiantes lograron el nivel 4.

En la Figura 3, se presenta el contraste de los desempeños en la resolución de problemas de los dos contextos y el nivel alcanzado por el grupo de estudio.

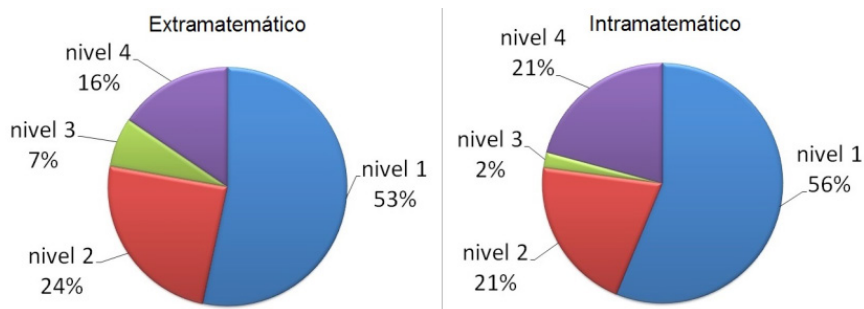


Figura 3. Porcentaje de soluciones, ubicadas en cada nivel en los dos contextos

En la Figura 3, se observa que el porcentaje de soluciones, ubicadas en los diferentes niveles, tienen casi la misma proporción en los dos contextos analizados en este estudio.

La otra parte de las soluciones presentadas consistió en identificar las estrategias que utilizaron los estudiantes al desarrollar los problemas de la prueba. A continuación, se presenta un análisis cualitativo de las estrategias usadas en las soluciones para las situaciones problema de contextos extramatemático e intramatemático.

Contexto extramatemático

Algunos estudiantes, que se ubicaron en el nivel 1, no identificaron los datos del problema ni las incógnitas, y los que realizaron un esquema no ubicaron los datos; omitieron algunos o los ubicaron de forma incorrecta; en la ejecución utilizaron elementos de la trigonometría, pero los cálculos fueron inadecuados y los datos incorrectos. Otros estudiantes, identificaron los datos y la incógnita del problema, y realizaron un esquema parcial de la situación; en el desarrollo utilizaron el teorema de Pitágoras o las relaciones trigonométricas con los datos del ejercicio, pero no consolidaron alguna solución. En la Figura 4, se observa la solución que realiza el estudiante 05 del problema 10, quien modela la situación con un triángulo rectángulo, indicando que tiene un ángulo agudo de 101° , con una hipotenusa de longitud más corta que uno de sus catetos; aplica la definición de la relación tangente para despejar el valor de la incógnita, la cual resulta ser una distancia negativa.

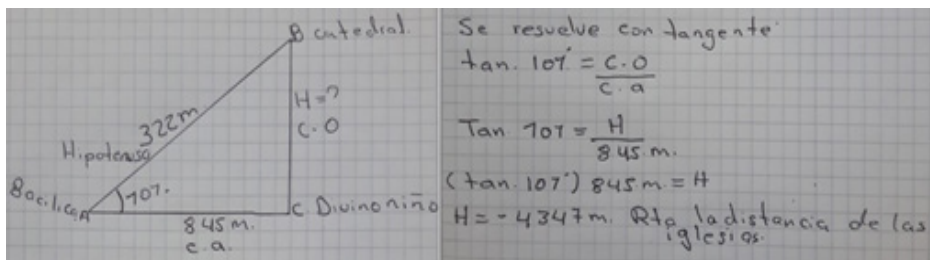


Figura 4. Solución para ubicarse en nivel 1 en contexto extramatemático

Los estudiantes, que se ubicaron en el nivel 2, identificaron los datos y la incógnita del problema, realizaron un esquema de la situación y utilizan algunos o todos los datos; en la ejecución utilizaron elementos, teoremas y leyes de la trigonometría, pero su manipulación no fue adecuada o la solución resultó inconclusa. El estudiante 16 realiza la solución del problema 10, tal como se presenta en la Figura 5, en la que realiza una gráfica adecuada, identificando los datos y la incógnita, pero cree que se debe resolver utilizando el teorema de Pitágoras; reemplaza los valores de forma correcta en el primer renglón, pero interpreta mal los valores de la calculadora.

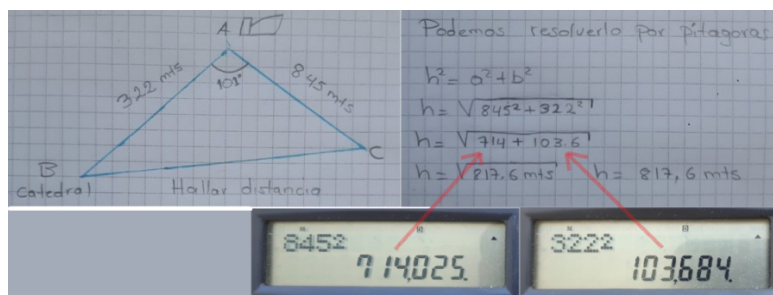


Figura 5. Solución para ubicarse en nivel 2 en contexto extramatemático

Los estudiantes, que se ubicaron en el nivel 3, realizaron un esquema y ubican todos los datos correctamente; identificaron los datos y la incógnita del problema. Dividieron el problema en dos o más situaciones, para resolverlas de forma separada y, al final, unieron las soluciones. Utilizaron los elementos, teoremas y leyes de la trigonometría, pero cometieron errores en los cálculos aritméticos o con la calculadora; en algunos casos los cálculos se realizaron con números enteros, lo cual conllevó un error en la respuesta y, finalmente, no realizaron la comprobación de la respuesta.



Los estudiantes, que se ubicaron en el nivel 4, realizaron un esquema, mostrando elementos de la trigonometría. Apuntan todos los datos correctamente e indicaron dónde se encuentra la incógnita. Remplazaron el problema por la solución de algunas dimensiones en los polígonos que modela el problema; utilizaron de forma pertinente los elementos, teoremas y leyes de la trigonometría; además, realizaron cálculos aritméticos y algebraicos adecuados y correctos.

Contexto intramatemático

Algunos estudiantes, que se ubicaron en el nivel 1, manifestaron no entender el problema y que no sabían cómo realizar el esquema que modelara la situación o realizaron un esquema de una figura geométrica diferente a la que planteaba el problema. Otros, identificaron los datos y la incógnita del problema y realizaron un esquema parcial de la situación; en la ejecución, utilizaron elementos de la trigonometría, pero los datos no fueron los correctos.

Los estudiantes, que se ubicaron en el nivel 2, identificaron los datos y la incógnita del problema, realizaron un esquema de la situación y pusieron algunos o todos los datos; utilizaron algunas operaciones aritméticas o algebraicas para calcular algunos datos. En la Figura 6, se observa la solución del problema 17 por parte del estudiante 09, en el que confunde la longitud del radio con la del diámetro de la circunferencia.

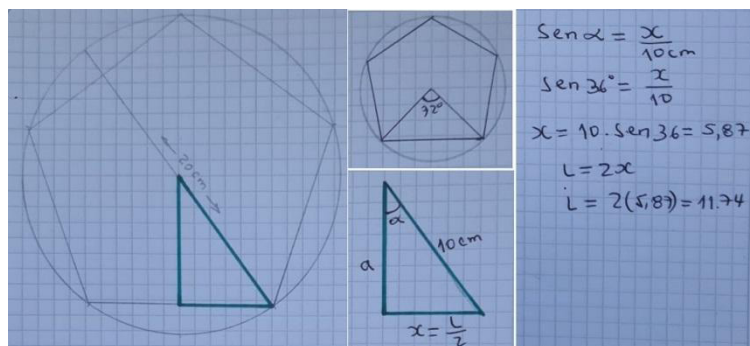


Figura 6. Solución para ubicarse en nivel 2 en contexto intramatemático

Los estudiantes, que se ubicaron en el nivel 3, realizaron un esquema adecuado y ubican todos los datos correctamente; identificaron los datos y la incógnita del problema. Dividieron el problema en dos o más situaciones, las resolvieron de forma separada y, al final, unieron



las soluciones; en la ejecución, cometieron errores en los valores que son necesarios obtener con la calculadora de funciones. El estudiante 12 realiza la solución del problema 17, de la forma como se presenta en la Figura 7; la estrategia es adecuada, pero realiza aproximaciones incorrectas en el cálculo de los valores, la respuesta presentada se acerca al valor ideal de 23.51 cm.

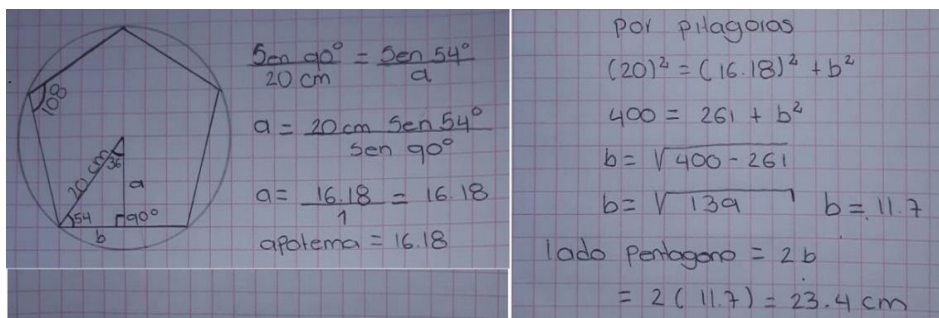


Figura 7. Solución para ubicarse en nivel 3 en contexto intramatemático

Los estudiantes, que se ubicaron en el nivel 4, realizaron un esquema mostrando elementos de la trigonometría; pusieron todos los datos correctamente e indicaron dónde se encontraba la incógnita. Remplazaron el problema por la solución de algunas dimensiones en los polígonos que modela el problema; en la ejecución, utilizaron los elementos, teoremas y leyes de la trigonometría; adicionalmente, realizaron los cálculos aritméticos y algebraicos adecuados y de forma correcta; por último, manifestaron que el procedimiento que utilizaron era el correcto porque es el que dominaban o el que indicaba el libro de texto.

Conclusiones

La prueba mostró que los problemas extramatemáticos son más comprensibles por parte de los estudiantes que los intramatemáticos. Además, muestra que la dificultad para obtener una solución completa y clara, en cualquiera de los dos contextos, se encuentra, en gran parte, en la aplicación incorrecta de los elementos, teoremas y leyes de la trigonometría, junto con la inadecuada manipulación algebraica de los datos, los cálculos aritméticos y el uso de las herramientas, como la calculadora, el transportador, la escuadra, entre otros.

Teniendo en cuenta el modelo de Allan Schoenfeld, se evidenció que la estrategia predominante, utilizada por los estudiantes, fue realizar el análisis del problema identificando los datos, las incógnitas



con la elaboración de algún esquema; después, pasaron directamente a la ejecución, utilizando los elementos de la trigonometría, ya fuera de forma correcta o incorrecta; por último, en cualquiera de estos dos casos, no realizan comprobación de la respuesta, sino que dan por sentado que la respuesta obtenida fue la correcta. Las dos fases del modelo en la resolución de problemas, que los estudiantes omitieron o no utilizaron, fueron el proceso de exploración y la comprobación de la solución.

Referencias

- Campos Arenas, A. (2009). *Métodos mixtos de investigación: integración de la investigación cuantitativa y la investigación cualitativa*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- ICFES. (2019). *Marco de referencia de la prueba de matemáticas Saber 11.º*. Bogotá, Colombia: Dirección de Evaluación, Icfes. Obtenido de <https://www.icfes.gov.co/documents/20143/1500084/Marco+de+referencia+-+matematicas+saber-11.pdf/4ac33900-99c8-cab5-2143-180405ff6647>
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Santa Fe de Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional. Obtenido de https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2a ed.). New York, Estados Unidos: Doubleday Anchor Books.
- Santos, L. M. (2015). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos* (2a ed.). México: Trillas, Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas.
- Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics*. New York: MacMillan, Estados Unidos: In D. Grouws.
- Sigarreta, J., Rodríguez, J., & Ruesga, P. (2006). *La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, XIII(1), 53-66.

Como citar este artículo: Chaparro-Cardozo, Z. y Martínez-Piña, R. (2021). Análisis De Los Conceptos Y Procedimientos, Utilizados En La Resolución De Problemas Convencionales De Trigonometría. Voces y Realidades Educativas, (6) 211 - 224
