CONCEPCIONES DESARROLLADAS SOBRE LA NOCION DINÁMICA DE LÍMITE, A PARTIR DEL USO DEL PROGRAMA GEOGEBRA

CONCEPTIONS DEVELOPED ABOUT THE DYNAMIC NOTION OF THE LIMIT FROM THE USE OF THE GEOGEBRA PROGRAM

Raúl Fernando Rodríguez Samacá [1]
Sandra Milena Murcia Pardo[2]

Recepción: 30/06/2021
Aceptación: 22/11/2021

Artículo de investigación

Resumen

El articulo presenta resultados parciales de la investigación que tiene como objetivo analizar el significado de la concepción *dinámica de límite*, que es construido por una estudiante de grado undécimo. Para llevar a cabo este objetivo se diseña, implementa y evalúa una secuencia de actividades, en las que, por medio del programa Geogebra, se busca que la estudiante realice el proceso de construcción de esta idea matemática. En la planeación de estas actividades se tiene en cuenta varios aspectos, basados en la noción de *aproximación* y *tendencia*, que fueron considerados esenciales, para la comprensión de este concepto, por varios investigadores. Asimismo, se plantea el uso de registros, de distinto tipo, y la conversión entre ellos, que permite realizar, de forma fácil, el programa Geogebra. Para el análisis de los resultados, se utiliza,

1 Estudiante Maestría en Educación Matemática, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia – Tunja – Boyacá. E-mail: raulnanor@hotmail.com

2 Magister en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá. E-mail: sandra.murcia@uptc.edu.co

como marco conceptual, la teoría de las representaciones semióticas y fundamentos de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Estructura), y se emplea una metodología cualitativa que permite identificar y describir las concepciones elaboradas sobre el concepto de *límite*. Los resultados muestran concepciones reconocidas en estudios previos, asociando el *límite* como el valor de la función en un punto.

Palabras Clave: Límite, registros de representación semiótica, APOE, Geogebra

Absract

The present article introduces some partial results about this research which objective is to analyze the meaning of the dynamic conception of the limit of a function built by an eleventh grade student. To carry out this objective, a sequence of activities was designed, implemented and evaluated through the use of the Geogebra program. The intention is that the student follows the building process of this mathematical idea. Different aspects and authors are considered when planning these activities based on the approximation and tendency notion which are contemplated as an essential element to understand this concept. In the same way, the registering and the conversion among them are formulated as Geogebra allows users to do these actions easier. To analyze the results, the theory of Semiotic and Representation and the fundamentals of APOS theory (Action, Process, Object, Scheme) are used as the conceptual framework. Likewise, a qualitative methodology allows the researcher to identify and describe the conceptions created from the concept of Limit. The results showed previous ideas from studies associated to the limit as the value of the function of a point.

Key words: Limit, semiotic representation registering, APOS, Geogebra

Introducción

En los últimos años, se han realizado diversos estudios, en el campo de la educación matemática, relacionados con la problemática de la enseñanza y aprendizaje de los conceptos del cálculo. En particular, el concepto *límite* ha sido objeto de investigaciones, dada la importancia de esta idea, dentro del pensamiento matemático avanzado, vinculada a conceptos como continuidad, derivada e integral. La dificultad, en el acceso al concepto de *límite,* no emana solo de su complejidad o de su riqueza, sino de entender que todos los aspectos cognitivos del concepto de límite no se pueden aprender partiendo de su definición matemática (Cornu, 1991).

Las diferentes investigaciones indican que, muchas veces, la idea de aproximación a un número es el primer contacto que tienen los estudiantes con el concepto de *límite*, a través de la noción dinámica de *límite* (Cornu, 1991). De tal forma, que esta concepción dinámica debiera ser la más apta para el desarrollo de los aprendizajes iniciales del análisis matemático (Blázquez et al., 2006). Cottrill et al. (1996) señalan que, para adquirir una idea formal de limite, este se debe visualizar, y para ello el estudiante debe construir un proceso de aproximación en el dominio y un proceso de aproximación en el rango, y usar la función para coordinarlos.

En la comprensión de la coordinación de estos procesos de aproximación desempeñan un papel determinante los diferentes modos de representación. En esta dirección, Blázquez y Ortega (2001) indican que la utilización de distintos sistemas de representación, cuando se trabaja el concepto de límite, tropieza con las dificultades del cambio de sistema de representación, que podría ser un obstáculo didáctico por el abuso del registro algebraico en la enseñanza tradicional. La dificultad de la conversión entre registros se subsana, en parte, si se utiliza el programa Geogebra para convertir unos sistemas de representación en otros.

La investigación planteada tiene como objetivo diseñar, implementar y evaluar una secuencia de actividades, en donde la interacción de los distintos sistemas de representación de Geogebra favorezca la construcción del significado de la concepción dinámica del concepto de *límite*, por parte de una estudiante de la asignatura de matemáticas, del grado once.

Marco Teórico

Los significados construidos del concepto de límite son analizados por medio de teorías cognitivas, que consideran la construcción de un objeto matemático como un proceso cognitivo que implica la construcción, por parte del estudiante, de estructuras cognitivas adecuadas. Estas construcciones usan significados lingüísticos, simbólicos y esquemáticos para expresar cambios de perspectiva y puntos de vista. (Dörffler, 2002). En específico, se emplean modelos teóricos, basados en las diferentes representaciones de un concepto que unifican a este constructo abstracto e imaginario, y se consideran los estadios sucesivos por los que se construyen los conceptos matemáticos, en las que cada nuevo estadio comienza por una reorganización, en otro nivel, de las principales adquisiciones logradas en los estadios precedentes (Piaget y García, 1982).

La *teoría de registros de representación semiótica*, propuesta por Duval (1995, 1996, 2006) destaca que el desarrollo del conocimiento matemático requiere de la diversificación de los sistemas de representación semiótica y de la coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica. Esta coordinación de los diferentes registros, se manifiesta por la capacidad de reconocer entre dos representaciones diferentes del mismo objeto, por lo que es necesario conocer cómo discriminar, en cualquier contenido de una representación, sea cual sea el registro utilizado, lo que es matemática relevante de lo que no lo es.

En el marco teórico APOE, la construcción de nuevas estructuras matemáticas viene determinada por las relaciones que los estudiantes, de forma consciente, son capaces de establecer entre los elementos matemáticos que configuran el concepto matemático (García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2010). El desarrollo del conocimiento es un proceso dinámico y en permanente evolución, que es influido por las etapas precedentes de desarrollo (Piaget y García, 1982). El uso de la teoría APOE permite inferir las construcciones mentales desde las observaciones de las producciones de los estudiantes en situaciones problemáticas, cuando tratan de comprender un determinado concepto (Dubinsky, 1991)

En esta investigación se basa el proceso de construcción del significado de la concepción dinámica de *límite* en dos aspectos: los elementos matemáticos que constituyen el concepto y los sistemas de representación semiótica, en donde se analizan las producciones que resultan de las actividades cognitivas, realizadas en los distintos registros, y se caracterizan las concepciones desarrolladas, cuando se abordan distintos sistemas de representación semiótica. Así mismo, se describen las aprehensiones que se realizan en el registro gráfico, y se analiza la articulación de estas, en el desarrollo de la comprensión de este concepto matemático.

Metodología

La investigación presentada es un estudio de caso, de corte cualitativo, que tiene como objetivo analizar y caracterizar los significados construidos de la noción dinámica de *límite*, cuando se usa el programa matemático Geogebra. La participante en esta investigación es una estudiante de grado once de bachillerato, de una institución pública de educación media, de la ciudad de Tunja. A esta estudiante se le había dado, con anterioridad, la enseñanza, en forma virtual, de las nociones de desigualdades, intervalos, funciones, y clases de funciones. Todo ello, en un contexto de uso del programa Geogebra, como complemento a las explicaciones que se impartían.

La elaboración de la secuencia de actividades estaba orientada a que la participante de la investigación estuviera preparada para acceder a la formalización del concepto de *límite*. El trabajo se desarrolló considerando las fases de: diseño según revisión de estudios de investigación relacionados con el concepto de limite, ejecución de las actividades diseñadas y análisis de resultados obtenidos en función del objetivo general de la investigación realizada.

Para el diseño de la secuencia de actividades, se tienen en cuenta los elementos matemáticos que estaban incluidos en la descomposición genética propuesta por Pons (2014) para la comprensión de la noción dinámica de límite: idea de función, idea de aproximación numérica bien en el dominio $(x \to a)$ o bien en el rango $f(x) \to L$; coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango, y manifestación de la existencia de la tendencia de la función. Las actividades están diseñadas para ser abordadas con el programa Geogebra, en dichas actividades se favorece el uso de distintos modos de representación y la conversión entre ellas.

La ejecución de las actividades se lleva a cabo de forma virtual, se envía, por medio de correo, las hojas de actividades, con las respectivas instrucciones que se debía seguir. La recolección de datos se hace a través de las hojas de trabajo en donde se contestan los ítems correspondientes a cada actividad, y de archivos de grabación de pantalla que registran todas las acciones en Geogebra, requeridas en dichas actividades.

Una vez recolectados los datos, se procede a identificar y a analizar los significados construidos de la noción dinámica de *límite*. A continuación, se caracterizan las concepciones que manifiesta la estudiante al resolver algunas de las actividades planteadas.

Resultados

Figura 1. Actividad 3

Actividad 3.

Dada la función $\boldsymbol{f(x) = 3\sqrt{x}}$:

a. Considere los valores $x_1 = 3$, $x_2 = 3.4$, $x_3 = 3.7$, $x_4 = 3.9$, $x_5 = 3.99$, $x_6 = 3.999$.
Hacer una tabla de valores, en la hoja de cálculo de GeoGebra, con los valores de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{f(x)}$.
Dibujar, en rojo, los puntos $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f(x)})$ en el plano cartesiano de la vista gráfica.

b. Observe la separación entre cada valor $x_1, x_2, x_3, \ldots$ y el valor $x = 4$. ¿Qué sucede con la distancia de estos valores respecto de $x = 4$?

c. ¿Hacia qué valor tiende $\boldsymbol{f(x)}$ cuando la variable $\boldsymbol{x}$ se aproxima a 4 por la izquierda? Justifique su respuesta.

d. Ahora considere los valores $x_1 = 5$, $x_2 = 4.6$, $x_3 = 4.3$, $x_4 = 4.1$, $x_5 = 4.01$, $x_6 = 4.001$.
En la misma hoja de cálculo, hacer una tabla con los valores de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{f(x)}$ y dibujar, en azul, los puntos $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f(x)})$ en el plano cartesiano de la vista gráfica.

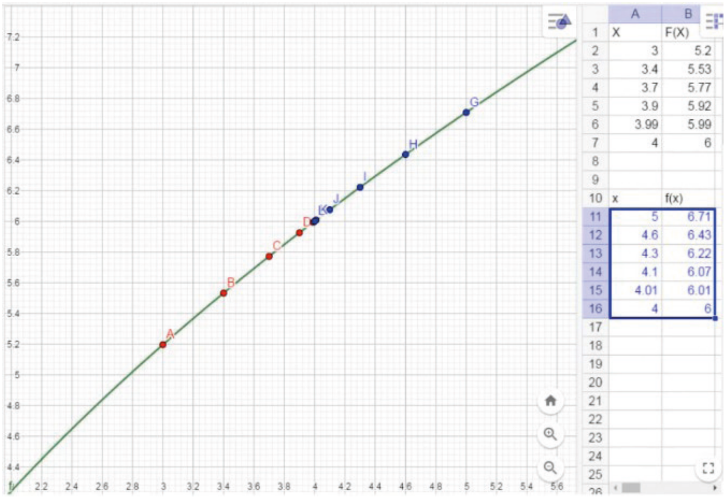
e. ¿Qué sucede con la distancia de cada uno de los valores $x_1, x_2, x_3, \ldots$ respecto a $x = 4$?

f. ¿Hacia qué valor tiende $\boldsymbol{f(x)}$, cuando la variable "$\boldsymbol{x}$" se aproxima a 4 por la derecha? Justifique su respuesta.

g. ¿Los resultados en c) y f) son iguales o distintos? Entonces, ¿a qué valor tiende $\boldsymbol{f(x) = 3\sqrt{x}}$, cuando nos aproximamos a $x = 4$? Justifique su respuesta.

En la caracterización realizada a la noción *límite* en la función continua $f(x) = 3\sqrt{x}$, se muestra las distintas concepciones que se pueden asociar a esta idea matemática, dependiendo del sistema de representación que se utilice. Una de ellas se basa en la idea gráfica de puntos, aproximándose a algo, y en la otra se presenta la idea de aproximación en secuencias de valores numéricos. En las representaciones gráfica y tabular de la función dada, se observa el carácter dinámico o de movimiento de la noción de *límite*.

Figura 2. Representaciones gráfica y numérica de la función $f(x) = 3\sqrt{x}$, realizadas por la estudiante



El enfoque dinámico y las concepciones espontáneas de los términos relacionados con el concepto de *límite,* se manifiestan en las respuestas b y c, de la correspondiente actividad, en donde se relaciona el *límite* como una descripción del movimiento de la función cuando x se mueve hacia un cierto punto, y, también, se interpretan como iguales las palabras "tiende hacia" y "aproximarse a", y a ambas frases se les asigna una interpretación dinámica.

Figura 3. Respuesta de la estudiante a las preguntas b. y c. de la actividad 3

b. Observe la separación entre cada valor x_1, x_2, x_3, ... y el valor $x = 4$. ¿Qué sucede con la distancia de estos valores respecto de $x = 4$?

Se puede observar que a medida que se van aproximando a 4 la dista va disminuyendo

c. ¿Hacia qué valor tiende $f(x)$ cuando la variable x se aproxima a 4 por la izquierda? Justifique su respuesta.

F(x) va aumentando y llega al 6 ya que se puede observar que a medida que la variable se aproxima a x=4 f(x) va aumentando y llega a 6

Como resultado del proceso de tendencia en una función continua, se observa, en el registro gráfico, que el punto al que se tiende, finalmente, es alcanzado, y en el registro numérico se relaciona, directamente, el *límite* con el valor de la función en dicho punto.

Figura 4. Respuesta de la estudiante a la pregunta g. de la actividad 3

Actividad 5:

Dada la función $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$

a. Elabore una tabla de valores, en la hoja de cálculo de GeoGebra, con los valores de x y $f(x)$, tomando valores de x cercanos a 5 por la izquierda. Dibuje, en rojo, los puntos $(x, f(x))$ en el plano cartesiano.

b. De acuerdo con lo anterior, si $x \to 5^-$, entonces $f(x) \to \square$.

c. En la misma hoja de cálculo, realice una tabla con los valores de x y $f(x)$, cuando la variable x se acerca a $x = 5$ por la derecha. Dibuje, en azul, los puntos $(x, f(x))$ en el plano cartesiano.

d. De acuerdo con lo anterior, si $x \to 5^+$, entonces $f(x) \to \square$.

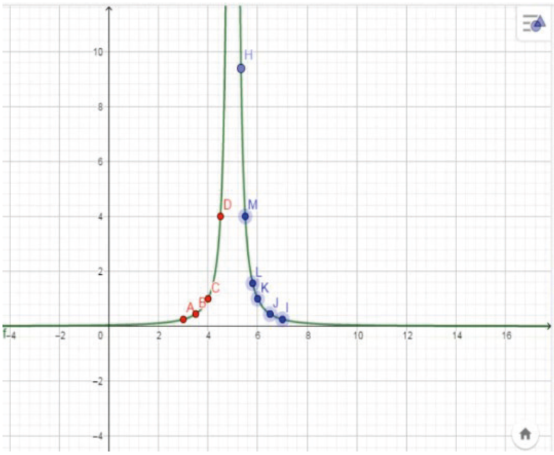
e. Cuando hay una aproximación a $x = 5$ ¿A qué valor tiende $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$? Justifique su respuesta.

Ahora complete: si $x \to 5$, entonces $f(x) \to \square$.

g. ¿Los resultados en c) y f) son iguales o distintos? Entonces, ¿a qué valor tiende $f(x) = 3\sqrt{x}$, cuando nos aproximamos a $x = 4$? Justifique su respuesta.

Distintos en cuanto al valor de se varia x pero tiene la misma función, $f(x) = 3\sqrt{x}$ tiende al 6, aumentando en c) por su lado izquierdo y disminuyendo en f) por su lado derecho

Figura 5. Actividad 5



	A	B
1	x	f(x)
2	3	0.25
3	3.5	0.44
4	4	1
5	4.5	4
6	4.8	25
7	4.89	2231.4
8	4.99	10000
9		
10		
11	x	f(x)
12	7	0.25
13	6.5	0.44
14	6	1
15	5.8	1.56
16	5.5	4
17	5.1	100
18	5	1000000
19		
20		
21		

El uso de varios sistemas de representación es necesario para la comprensión de un concepto matemático, pues con uno solo no se obtiene la comprensión integral y, por lo menos, se necesitan 2 registros de representación como, por ejemplo, el grafico y el tabular (Duval, 1998). La descoordinación de las representaciones, se evidencia en la Actividad 5, en donde se encontraron dificultades para encontrar la tendencia de la función $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$ en $x = 5$.

Actividad 8:

Abra el archivo **Actgraf-4** y mueva el punto rojo en la vista gráfica para responder las siguientes preguntas. (Nota: una forma de mover el punto rojo es pulsando la tecla flecha derecha)

a. Complete la siguiente tabla de valores:

x	3	3.4	3.7	3.9	3.99	3.999
$f(x)$						

b. Si $x \to 4^-$, entonces $f(x) \to \square$

c. Ahora, considere la siguiente tabla de valores:

x	4.001	4.01	4.1	4.3	4.6	5
$f(x)$						

d. Si $x \to 4^+$, entonces $f(x) \to \square$

e. ¿Son iguales los resultados en b) y d)? ¿Por qué?

f. ¿Qué se puede decir entonces de la función $f(x)$ cuando x se aproxima a 4?

Figura 6. Representaciones gráfica y numérica de la función $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$ realizadas por la estudiante

d. De acuerdo con lo anterior, si $x \to 5^+$, entonces $f(x) \to 1000000$

En la representación tabular, se observa una secuencia numérica con valores correspondientes a y, en donde la mejor aproximación no sería suficiente para determinar, de forma precisa, el *límite* de la función. En el sistema de representación gráfica, no desarrolló la capacidad de tratamiento dentro de la vista gráfica de Geogebra, para visualizar la tendencia de la función en $x = 5$. A pesar de disponer de dos representaciones, solo usó la tabular, interpretando que el límite es donde está definida la función en dicha tabla de valores, sin considerar que la función no es continua.

Figura 7. Respuesta de la estudiante a la pregunta d. de la actividad 5

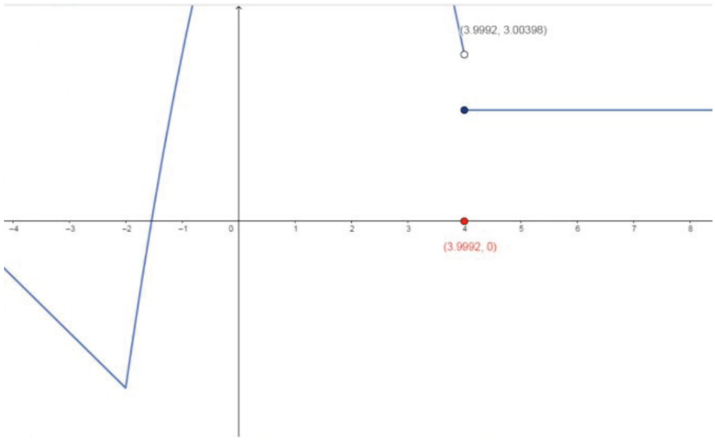


Figura 8. Actividad 8

También se observan otras concepciones de límite, cuando se utilizan los dos registros de representación tabular y gráfico, tal como en el caso de la actividad 8. A partir de la representación gráfica inicial de una función definida a trozos, que se presenta en un archivo de Geogebra, se realizan tratamientos dentro de este mismo registro.
Figura 9. Tratamiento de la representación gráfica de la función de la Actividad 8

Al utilizar las herramientas *alejar* y *aproximar* de este programa, se cambiaron las dimensiones de los ejes coordenados X y Y, produciendo las modificaciones ópticas, que sirvieron para hacer una lectura aproximada de los valores del trozo de función $f(x) = -x^2 + 3x + 7$, correspondientes a las aproximaciones por la izquierda del punto $x = 4$. De tal forma que, al plasmar estos valores leídos en una tabla de valores, realiza una conversión del registro grafico al registro tabular.

a. Completar la siguiente tabla de valores:

x	3	3.4	3.7	3.9	3.99	3.999
$f(x)$	7	5.60	4.40	3.45	3.04	3

Figura 10. Respuesta de la estudiante a la pregunta a. de la Actividad 8

Finalmente, para encontrar el límite, solo se usó el sistema de representación tabular, en donde, al no tomar las suficientes cifras significativas de los valores de la función, y al tener la concepción espontánea de que el límite corresponde a valores enteros, se evidencia que asocia al modo numérico, una concepción limitada del proceso de aproximación.

b. Si $x \to 4^-$, entonces $f(x) \to 2$

Figura 11. Respuesta de la estudiante a la pregunta b. de la Actividad 8

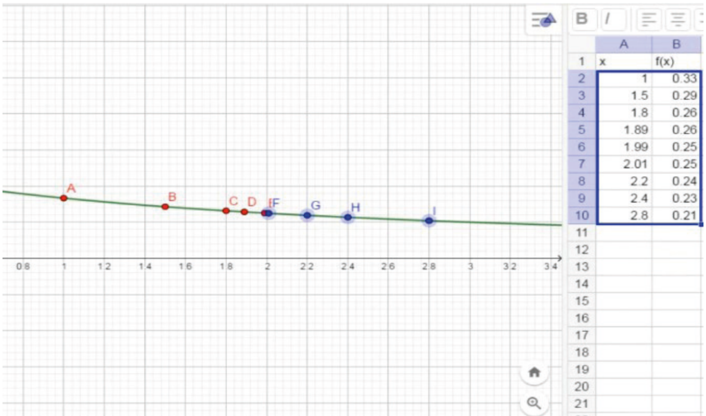
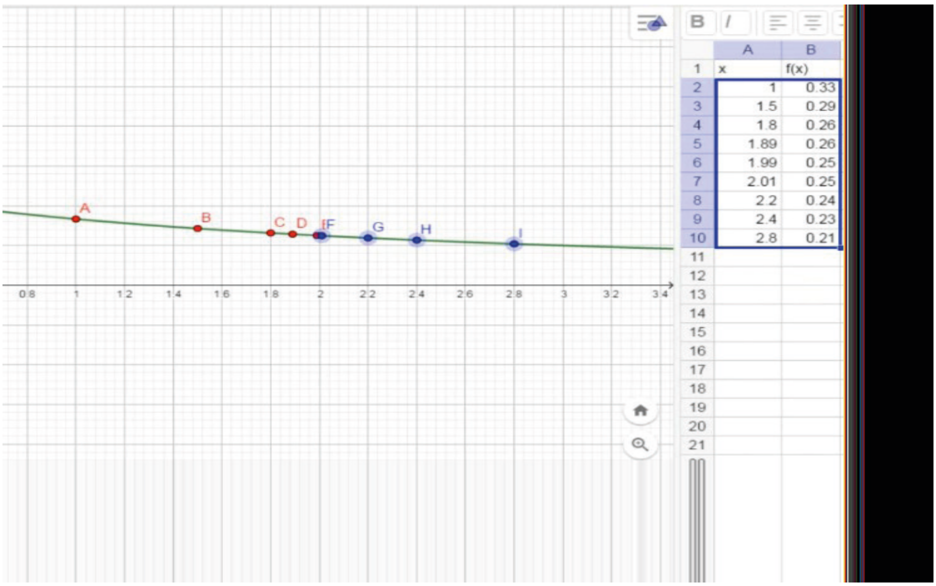


Figura 12. Actividad 1 de cierre



Después de haberse introducido el concepto de límite, con su respectiva notación matemática, se planteó en la actividad 1 de cierre: encontrar el límite de la función discontinua $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ en $x = 2$. De las dos representaciones de la función, en el registro numérico y gráfico, de que dispone Geogebra para la situación planteada, solo utiliza el sistema de representación gráfica, ya que, en la respuesta presentada, se considera la concepción de que una función discontinua no tiene límite.

e. Lea el siguiente texto y escriba si existe el límite de cada una de las funciones cuando x tiende a 2. Justifique su respuesta.

En la primera función no hay límite ya que no tiene un número y en la segunda tiene límite por sus dos lados ya que son números finitos

Figura 13. Representaciones gráfica y numérica de la función $f_1(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ realizadas por la estudiante

Al leer la gráfica de la función planteada y al tener la idea intuitiva de que el *límite* corresponde al valor de la ordenada del punto de estudio, se forma un conflicto cognitivo que evidencia la débil construcción de este concepto matemático.

Figura 14. Respuesta de la estudiante a la pregunta e. de la Actividad 1 de cierre

Tal vez, esta idea se relaciona con la percepción, de que la simbolización de la operación del paso al límite con el signo "=" hace que se asimile con algebra, así se esconden las diferencias para llevar de esta forma, a una pérdida de significado (Sierpinska, 1985). En esta situación planteada, se evidencia que el signo igual se contrapone a la idea intuitiva de "aproximación", lo cual provoca un pensamiento de que el *límite* es alcanzado.

Figura 15. Respuesta de la estudiante a la pregunta f. de la Actividad 1 de cierre

f. Ahora complete: $\lim_{x \to 2} f_1(x) =$?

$\lim_{x \to 2} f_2(x) =$ por la izquierda 4 y por su derecha 1

Conclusiones

En este estudio se identifican algunas concepciones, desarrolladas por una estudiante, en el proceso de construcción de la noción dinámica de *límite*, al realizar una secuencia de actividades que integraban recursos informáticos. La realización de las actividades muestra que la estudiante tiene dificultades en coordinar las aproximaciones y tendencias, en el dominio y rango, de algunas funciones, al asociar el límite como el valor de la función en un punto.

Los resultados de esta investigación apoyan los presentados por Blázquez y Ortega (2001) en el sentido de que el sistema numérico muestra claramente el aspecto de aproximación de *límite*. Este registro sugiere una idea dinámica, local y vinculada con la realidad, pero muestra una cierta desvinculación de tendencias de x y y. El programa Geogebra permitió realizar tratamientos, dentro del sistema gráfico, en donde se destacan los aspectos visuales de este concepto y se logra vincular las tendencias de ambas variables.

En el estudio de caso presentado, se observa la potencialidad del programa Geogebra, ya que, al usarse en la construcción del concepto de *límite*, la estudiante dedicó sus esfuerzos al proceso de abstracción de esta idea matemática, sin necesidad de realizar cálculos rutinarios que requieran de precisión. Además, la versatilidad que tiene este programa le permitió a ella, disponer de las distintas representaciones de las funciones planteadas en las actividades, al contrastarlas, le permitió manifestar los significados elaborados de la noción dinámica de *límite*.

Las transformaciones de registros de representación semiótica, realizadas en Geogebra, no fueron suficientes en el desarrollo de la comprensión del concepto de *límite*, ya que en las respuestas dadas, en las actividades planteadas, se evidencia la concepción desarrollada por la estudiante, de que el limite sucede en el punto y no en su entorno. Esta idea intuitiva de la estudiante respalda la complejidad de la adquisición del concepto de *límite*.

Desde la experiencia docente, se recomienda el uso y la incorporación de la tecnología en el proceso de enseñanza de las matemáticas, porque constituye un entorno más atractivo y motivador, que potencia la experimentación y el análisis de resultados. Para que los estudiantes saquen el mayor provecho de Geogebra, es aconsejable que reciban, con anterioridad, las instrucciones del manejo de este programa.

Referencias

Blázquez, S., & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4(3)*, 219-236.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., & Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9 (2)*, 189-209.

Cornu, B. (1991). "Limits", in D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking,* 153-166, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of mathematical Behavior, 15*, 167-192.

Dörffler, W. (2002). Formation of Mathematical objects as decision making. *Mathematical Thinking and Learning,* 4(4), 337-350.

Dubinsky, E. (1991). Reflextive abstraction in advanced mathematical thinking. En Kluwer, & D. all (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (págs. 95-126). Dordrecht: The Netherlands.

Duval, R. (1995). Registres sémiotiques et apprenttissages intellectuels. (P. Lang, Ed.) *Sémiosis et pensé humaine*.

Duval, R. (1996). Quel cognitive retenir en Didactique des Mathematiques. *Researches en Didactique des Mathématiques,* 16(3), 349-382.

Duval, R (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana and V.Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of the Geometry for the* 21^{st} *Century,* (pp. 37-51). Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

García, M., Llinares, S., & Sanchez-Matamorros, G. (2010). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International of Journal of Science and Mathematics Education*. Doi: 10.1007/s10763-010-9227-2.

Guarín, S., Parada, S., & Fiallo, J. (2018). Un acercamiento a la comprensión del concepto de Límite de una Función en un punto. *Revista Colombiana de matemática educativa*, 3 (2).

Hitt, F. (2016). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza. México.

Mira, M. (2016). Desarrollo de la comprensión del concepto de límite de una función. Características de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (Tesis Doctoral). Universidad de Alicante. España.

Piaget, J., & García, R. (1982). Psicogénesis e Historia de la Ciencia. México, España, Argentina, Colombia (Madrid): Siglo Veintiuno Editores, S.A.

Pons, J. (2014). Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto (Tesis Doctoral). Universidad de Alicante. España.

Pons, J., Valls, J., & Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. *Investigación en Educación Matemática XVI*, 435-445.

Sierpinska, A. (1985). Epistemological obstacles relative to the limit concept. Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des mathematique*, 6(1), 5-67.

Como citar este artículo: Rodríguez-Samacá, R. y Murcia-Pardo, S. (2021).Concepciones desarrolladas sobre la noción dinámica de límite, a partir del uso del programa Geogebra. Voces y Realidades Educativas, (7). 65-79