



EXPLORANDO EL OBJETO MATEMÁTICO PENDIENTE EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA

EXPLORING THE SLOPE MATHEMATICAL OBJECT IN MIDDLE SCHOOL STUDENTS

*Yesid Becerra Rodríguez¹
Helver Armando López Cely²
German Eduardo Morales Gómez³*

Recepción: 12 Septiembre de 2022
Aceptación: 14 Octubre de 2022
Artículo de investigación

Resumen

Este artículo presenta una caracterización de los errores y dificultades en la conceptualización del objeto matemático pendiente, analizando cómo influye en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. La metodología utilizada presenta cuatro momentos: búsqueda y organización de información; planificación de un diagnóstico sobre errores y dificultades relacionadas con el aprendizaje del objeto pendiente; realimentación del objeto de estudio, donde se diseñó y se aplicó una secuencia didáctica para recordar nociones de la pendiente; por último, se efectuó un análisis

- 1 Magister en Educación Matemática y profesor de la Escuela de Matemáticas y Estadística de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Seccional Duitama, y miembro del grupo de Investigación EDUMAES, Email: yesid.becerra@uptc.edu.co. ORCID <https://orcid.org/0000-0003-2939-179X>
- 2 Estudiante Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Seccional Duitama, y miembro del grupo de Investigación EDUMAES, Email: helver.lopez@uptc.edu.co ORCID <https://orcid.org/0000-0001-7388-8176>
- 3 Estudiante Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Seccional Duitama, y miembro del grupo de Investigación EDUMAES, Email: german.morales@uptc.edu.co ORCID iD <https://orcid.org/0000-0001-9631-1804>



de resultados. Su unidad de análisis estuvo conformada por 27 estudiantes de grado undécimo de una Institución pública de la ciudad de Duitama, donde se encontró que los estudiantes no conocen conceptualizaciones como razón trigonométrica y como propiedad determinante, además, cometieron errores vinculados a procedimientos incompletos, respuestas inconclusas y sin sentido matemático, lo anterior asociado a la falta de conocimientos previos. Finalmente, un porcentaje alto de estudiantes demostraron comprensión sobre algunas conceptualizaciones como constante lineal, coeficiente paramétrico, razón geométrica, resolviendo satisfactoriamente situaciones relacionados con estas conceptualizaciones.

Palabras clave: Error, Dificultad, Conceptualización, Pendiente

Abstract

This article presents a characterization of the mistakes and difficulties in the conceptualization of the slope mathematical object, analyzing how it influences the teaching and learning processes. The methodology used presents four moments: search and organization of information; planning a diagnosis on errors and difficulties related to learning the slope object; feedback of the object of study, where a didactic sequence was designed and applied to remember notions of the slope; finally, an analysis of the results was carried out. Its unit of analysis was made up of 27 eleventh grade students from a public institution in the city of Duitama, where it was found that the students do not know conceptualizations such as trigonometric ratio and as a determining property, in addition, they made errors related to incomplete procedures, inconclusive answers and without mathematical sense, the above associated with the lack of prior knowledge. Finally, a high percentage of students demonstrated understanding of some conceptualizations such as linear constant, parametric coefficient, geometric ratio, satisfactorily resolving situations related to these conceptualizations.

Keywords: Mistake, Difficulty, Conceptualization, Slope

Introducción

Un primer acercamiento al objeto matemático pendiente en Colombia, se da en la Educación Básica Secundaria, según lo establecido en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (EBCM) del Ministerio de Educación Nacional (MEN) en relación con el pensamiento



variacional y sistemas algebraicos y analíticos, con el estándar “identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación” (EBCM, 2006 p. 87). De acuerdo con Abreu et al. (2020) “el concepto de pendiente se considera esencial en la formación matemática de los estudiantes, fundamentalmente, porque es base de otros conceptos importantes dentro de la matemática elemental y superior” (p. 82). Desde el área de la Educación Matemática se proponen 12 conceptualizaciones y para este estudio se optaron 10, como se presenta a continuación.

Tabla 1. Conceptualizaciones del objeto matemático pendiente

Categoría	Pendiente como	Código
Geométrica	Razón entre el desplazamiento vertical y horizontal. Definida como la representación del lugar geométrico recta y su ubicación dentro de un plano cartesiano.	G
Razón Algebraica	Variación en y sobre la Variación en x , razón algebraica $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ó $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.	A
Propiedad física	Descripción de la recta utilizando expresiones como: grado, inclinación, tendencia, ladeo, declive, etc.	P
Propiedad funcional	Razón de cambio constante entre dos variables, representada en tablas, descripciones verbales, etc. (v. gr. cuando x aumenta 2, y aumenta 3); o bien observada en situaciones que implican razones de proporcionalidad constante, donde la razón referida a la unidad es la pendiente.	F
Coficiente Paramétrico	Coficiente m (valor numérico) en $y = mx + b$ o $y - y_1 = m(x - x_1)$	PC
Trigonométrica	Propiedad relacionada con el ángulo que forma una recta con la horizontal (eje x); ángulo de inclinación. $\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.	T



Situación del mundo real	Situación física (estática): rampas, escaleras, montañas, cimas. Situación funcional (dinámica): relación entre dos variables en otros contextos, v. gr., distancia versus tiempo, velocidad versus tiempo.	R
Propiedad determinante	Propiedad que determina si las rectas son paralelas o perpendiculares; propiedad con la que una recta puede ser determinada si se conoce un punto de ella.	D
Constante lineal	Propiedad constante y única para las rectas; La pendiente de la recta no es afectada por la traslación de la misma. Es una propiedad constante en la colinealidad de los puntos de una recta, independiente de la región del gráfico lineal que se está considerando, es decir que dos puntos cualesquiera de la recta determinan la pendiente.	L
Indicador de comportamiento	Número real con signo que indica crecimiento (+), decrecimiento (-), tendencia horizontal de la línea (0). Si no es cero, indica la existencia de intersección con el eje x .	B

Fuente: elaboración de los autores, basándose de Abreu et al. (2020), Dolores y Mosquera (2022).

En el proceso de aprendizaje de la matemática, los errores y dificultades se han convertido en una temática de interés en el campo de la Educación Matemática y aparecen con mucha frecuencia cuando se quiere que el educando construya su propio conocimiento, tanto en lo conceptual como en lo procedimental. A continuación, se presenta un encuadre teórico referente a errores; desde la perspectiva de Rico (1998) se menciona que:

Surgen de manera sorprendente, dado que, por lo general, se mantienen ocultos para el profesor durante algún tiempo. (2) suelen ser persistentes, al reflejar un conocimiento del alumno. (3) pueden ser sistemáticos, es decir, reflejar la presencia de un conocimiento o comprensión insuficientes o equivocados sobre un determinado concepto; pero también pueden deberse al azar o a un descuido. (4) La veracidad de una respuesta errónea no suele ser cuestionada por el estudiante. (p. 84).

Por otro lado, Radatz (como se citó en Rico, 1998, pp. 88-89) menciona:

❶: errores debidos a dificultades en el lenguaje: una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos es fuente de errores; la resolución de problemas verbales está especialmente abierta a errores de traducción



desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.

Ⓔ₂: Errores debidos a dificultades para obtener información espacial: es cierto que las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales desde una fuente de dificultades para muchos jóvenes y niños en la realización de tareas matemáticas.

Ⓔ₃: errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos: influyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Estas diferencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.

Ⓔ₄: errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento: son causados por la falta de flexibilidad en el pensamiento para codificar y decodificar nueva información.

Además, se tomaron los siguientes errores de Mavshovitz et al. (citados en Rico, 1998, pp. 90-91) con la siguiente clasificación:

Ⓔ₅: datos mal utilizados. Se encuentran casos en los que se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien, se hace lectura incorrecta del enunciado.

Ⓔ₆: errores técnicos. Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, errores al tomar datos de una tabla, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.

De acuerdo con Bravo y Patiño (2016) se tomaron los siguientes errores:

Ⓔ₇: vinculados a errores de cuentas. Dentro de este grupo, se encuentran errores cometidos por el olvido de algún signo en alguna expresión, de transcribir mal el enunciado a la resolución.

Ⓔ₈: vinculados a ejercicios incompletos, desarrollados a la mitad o hasta cierto instante. En este grupo se encuentran los errores en los que el alumno no culmina un ejercicio y por lo tanto no contesta a la consigna pedida, pero durante el procedimiento realizado no comete otro tipo de error.

Ⓔ₉: vinculados a falta de conocimientos sobre procedimientos algebraicos para desarrollar ejercicios. Se incluyen en este grupo los errores en los



que el alumno manifiesta el conocimiento sobre la forma de proceder para solucionar un ejercicio, pero queda limitado ante la necesidad de aplicar un procedimiento algebraico más básico (factorización, resolución de sistemas lineales, entre otros.).

Respecto a las dificultades, estas son de diversa índole y se agrupan en cinco grandes categorías. Las dos primeras están relacionadas con los objetos matemáticos y procesos de pensamiento que son asociados a la propia disciplina, la tercera está ligada a procesos de enseñanza de las matemáticas; la cuarta en conexión con los procesos cognitivos de los estudiantes y una quinta, relacionada con la falta de una actitud racional hacia las matemáticas (Socas, 2007).

Particularmente, en relación con el objeto de estudio, “los estudiantes confunden la medida del ángulo de inclinación de una recta con su pendiente, otros solo evidencian una pendiente desde su aspecto geométrico, localizando dos puntos en un plano o su ubicación en el mismo, pero no la aplicabilidad a otras disciplinas” (Suarez y Berdugo, 2021, p.184). En este sentido, la investigación tuvo como objetivo caracterizar los errores que se presentaron a partir de las dificultades que tienen los estudiantes de grado undécimo, al solucionar situaciones problema que involucran las distintas conceptualizaciones del objeto matemático pendiente.

Metodología

Este estudio se enmarcó en el paradigma de investigación cualitativa a nivel exploratorio; se tomó como unidad de análisis un grupo de 27 estudiantes de grado undécimo de una institución educativa de carácter público (calendario A) de la ciudad de Duitama, con edades comprendidas entre los 16 y 18 años. La recolección de información se hizo a través una prueba diagnóstica validada por juicio expertos. Este trabajo se desarrolló en los siguientes momentos:

Primer momento. Búsqueda y organización de información. Se realizó una consulta teórica desde Socas (1988), Radatz (como se citó en Rico,1955), Movshovitz et al. (como se citó en Rico,1955), Bravo y Patiño (2016) sobre errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, respecto a las conceptualizaciones establecidas en el campo de la Educación Matemática tomamos autores como: Abreu et al. (2020), Dolores y Mosquera (2022).

Segundo momento. Planificación de un diagnóstico sobre errores y dificultades relacionadas con el aprendizaje del objeto pendiente; se



establecieron trece ítems referentes a la conceptualización de la tabla 1 y los errores recopilados en el primer momento; a partir de un análisis a priori se presenta la tabla 2, con cuatro columnas construidas de la siguiente manera: (1) indicada en número del ítem, (2) código donde se indicada las conceptualizaciones, (3) posibles errores y dificultades, (4) relación con la teoría de errores.

Tabla 2. Análisis a priori de la prueba diagnóstica

Ítem	Código	Posibles errores y dificultades a priori del objeto matemático	Relación teórica de los errores
1	R y G	<p>R_1: no reconoce la pendiente como valor porcentual a partir de la imagen.</p> <p>G_1: no calcula el porcentaje de la pendiente como resultado de la relación entre los desplazamientos vertical y horizontal mostrado en la gráfica.</p>	e_1, e_2, e_3
2	R y P	<p>R_2: no reconoce la pendiente en función de las características que presenta la imagen.</p> <p>P_1: no describe la pendiente con expresiones como: grado, inclinación, tendencia, ladeo, declive, etc.</p>	e_1, e_2, e_3, e_4
3	B	<p>B_1: no reconoce que si la pendiente es positiva (+) la recta es creciente.</p> <p>B_2: no reconoce que si pendiente es negativa (-) la recta es decreciente</p> <p>B_3: no reconoce que la pendiente es cero si la recta es horizontal.</p>	e_1, e_3, e_4, e_6, e_8
4	G y L	<p>G_2: No reconoce la recta como lugar geométrico ni su ubicación dentro del plano</p> <p>L_1: no reconoce que la recta tiene la misma pendiente sin importar cuales dos puntos tome sobre ella.</p>	e_1, e_2, e_3, e_4



5	A, R y P	<p>A_1: no calcula la pendiente a partir de su valor porcentual y no relaciona el resultado con la definición intuitiva de pendiente,</p> $m = \frac{\text{elevación}}{\text{Avance}} .$ <p>R_3: no reconoce la pendiente como valor porcentual a partir de la información del problema.</p> <p>P_1: no relaciona pendiente con grado, inclinación, elevación.</p>	<p>e_1, e_3, e_4 e_5, e_9</p>
6	A	<p>A_2: no utiliza la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para calcular la pendiente a partir de las coordenadas de dos puntos.</p> <p>A_3: no calcula las diferencias y obtiene la razón de cambio.</p> <p>A_4: no relaciona los diferenciales Δy con elevación y Δx con el avance.</p>	<p>$e_1, e_3, e_4,$ e_5, e_6, e_9</p>
7	T	<p>T_1: no identifica la relación entre la pendiente y la tangente del ángulo.</p>	<p>e_1, e_3</p>
8	PC	<p>PC_1: no representa la ecuación de la recta a partir de un punto y la pendiente.</p> <p>PC_2: no relaciona la pendiente como el coeficiente paramétrico de la ecuación de la recta $y = mx + b$</p>	<p>$e_3, e_4, e_5,$ e_6, e_9</p>
9	PC y A	<p>PC_3: no relaciona la pendiente como el coeficiente paramétrico de la ecuación de la recta $(y_2 - y) = m(x_2 - x)$</p> <p>A_2: no utiliza la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para calcular la pendiente a partir de las coordenadas de dos puntos.</p>	<p>e_1, e_3, e_5 e_9</p>



10	T, PC y P	<p>T_2: no relaciona el ángulo con el grado de inclinación de la pendiente</p> <p>PC_4: no relaciona la pendiente como el coeficiente paramétrico de la ecuación de la recta $y = mx + b$</p> <p>P_2: no relaciona pendiente con grado, inclinación, elevación, ángulo...</p>	<p>e_3, e_5, e_9</p>
11	R, F, G	<p>R_4: no reconoce la pendiente como valor porcentual a partir de la información del problema.</p> <p>F_1: no interpreta la pendiente en los datos del problema como una razón de cambio constante entre 2 variables</p> <p>G_2: No reconoce la recta como lugar geométrico ni su ubicación dentro del plano.</p>	<p>e_1, e_2, e_3 e_5, e_6</p>
12	A, y D	<p>A_2: no utiliza la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para calcular la pendiente a partir de las coordenadas de dos puntos.</p> <p>D_1: no asocia el valor de la pendiente como propiedad para definir paralelismo entre 2 rectas.</p>	<p>e_3, e_4, e_5</p>
13	CP y D	<p>PC_4: no representa la ecuación punto pendiente a partir de la ecuación general de la recta, ni relaciona la pendiente como el coeficiente paramétrico de la ecuación de la recta $y = mx + b$.</p> <p>D_2: no asocia el valor de la pendiente como propiedad para definir perpendicularidad entre 2 rectas</p>	<p>$e_3, e_4, e_5,$ e_6, e_9</p>

Fuente: elaboración propia



Tercer Momento. Realimentación del objeto de estudio. Se diseñó y se aplicó una secuencia didáctica para recordar nociones del objeto matemático pendiente con los siguientes códigos: G, A, P, F, PC, T, R, D, L y B (ver Tabla 1) en dos sesiones de clase de dos horas cada una, la cual fue instrumento para el análisis de resultados.

Cuarto momento. Análisis de los resultados de diagnóstico e identificación de los errores y dificultades específicas en las conceptualizaciones G, A, P, F, CP, T, R, D, L y B del objeto matemático pendiente. Se aplicó una prueba diagnóstica en una sesión de tres horas a estudiantes el cual tenían conceptos previos para su desarrollo. Las categorías de análisis son las establecidas en la tabla 2.

Técnicas e instrumentos de investigación

Los instrumentos utilizados fueron: una secuencia didáctica, dirigida para realimentar la temática por diagnosticar, que fue aplicada en el tercer momento y un cuestionario diagnóstico, trabajado en el cuarto momento, que fue sometido a pares evaluadores para su validación. Se describió y se analizó el cuestionario diagnóstico, respecto a las técnicas de investigación utilizadas, de acuerdo con Rico (1998, p. 99) son:

Contar el número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas. este método que tiene un valor diagnóstico limitado es cercano al método psicométrico, y ha dominado la educación estatal hasta hace poco.

Análisis de los tipos de errores cometidos. Esta técnica implica usualmente clasificar diferentes tipos de error, examinar cómo se desvían de la solución correcta y hacer inferencias sobre qué factores pueden haber conducido al error.

Construir problemas de tal modo que puedan provocar errores en los individuos. Aquí el investigador observa el patrón de error cometido por los individuos; especula sobre las posibles causas de estos errores.

Resultados

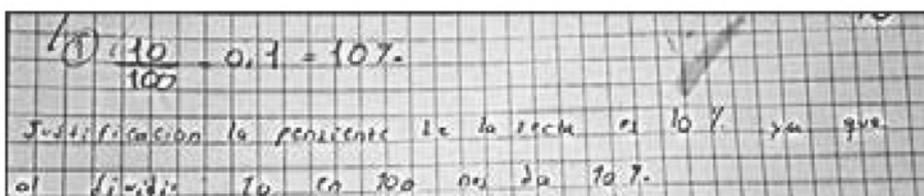
Se presentan los resultados analizados en el cuarto momento, a partir de una tabla de análisis que permitió conocer los errores cometidos por los estudiantes para cada una de las conceptualizaciones.



Conceptualización G

En el primer ítem se identificó que un estudiante que corresponde al 3.7%, incurrió en el error $G_1 - e_3$, no utiliza la definición de pendiente como la relación entre los desplazamientos vertical y horizontal y está asociado al aprendizaje deficiente de hechos. Por otro lado, en el ítem 11 se evidenció que cinco estudiantes, que corresponden al 19.23 %, incurrieron en el error $G_2 - e_2$, es decir, no reconocen la recta como lugar geométrico ni su ubicación dentro del plano, se les dificulta obtener información espacial.

Figura 1. Evidencia del error tipo G_1, e_3

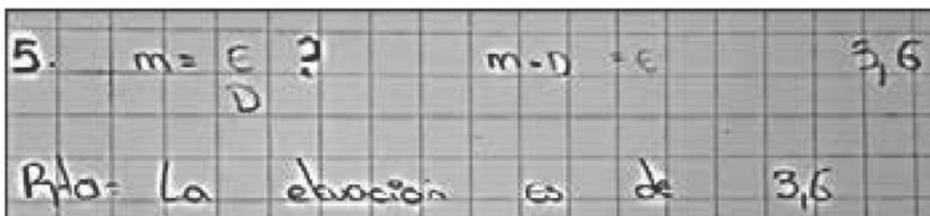


Fuente: respuesta E-18

Conceptualización A

Se observó en el ítem 5 que nueve estudiantes, correspondientes al 34.6 %, incurrieron en el error $A_1 - e_3$, en el sentido que no calcula la pendiente a partir de su valor porcentual y $m = \frac{\text{elevación}}{\text{avance}}$, debido a que solo presenta un número como respuesta, sin justificación matemática, relacionado con el aprendizaje deficiente de hechos básicos.

Figura 2. Evidencia del error tipo A_1, e_3



Fuente: respuesta E-15

Por otra parte, en el ítem 6 y 9, tres estudiantes, que corresponden al 11.54 %, incurrieron en el error $A_2 - e_3$, donde no usaron de manera adecuada un procedimiento algebraico (ver figura 3 y 4). Un estudiante, que corresponde al 3.84 %, incurrió en el error $A_3 - e_5$, con datos mal



utilizados (ver figura 5). Dos estudiantes, que corresponden al 7.69 %, incurrieron en el error $A_4 - e_6$, con una dificultad en la identificación de los diferenciales de elevación y avance, con inadecuada manipulación de los ejes coordenados en el plano cartesiano (ver figura 6). Finalmente, en el ítem 12, se identificó que cinco estudiantes, correspondientes al 19.23 %, incurrieron en el error $A_2 - e_8$, con procedimientos incompletos (ver figura 7).

Figura 3. Evidencia del error tipo A_2, e_7

The image shows handwritten work on grid paper. On the left, the slope formula is written as $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Below it, a calculation is shown: $m = \frac{5 - (-2)}{3 - (-4)}$. To the right, there is a vertical calculation: $\frac{0.5}{0}$ with a note "Rendición" written vertically. There are also some scribbles and the number "0.5" written at the top right.

Fuente: respuesta E-19

Figura 4. Evidencia del error tipo A_2, e_7

The image shows handwritten work on grid paper. The slope formula is written as $m = \frac{5 - 2}{3 - (-7)} = \frac{3}{-4} = 0.4$. Below this, there is a vertical calculation: $\frac{3}{10}$.

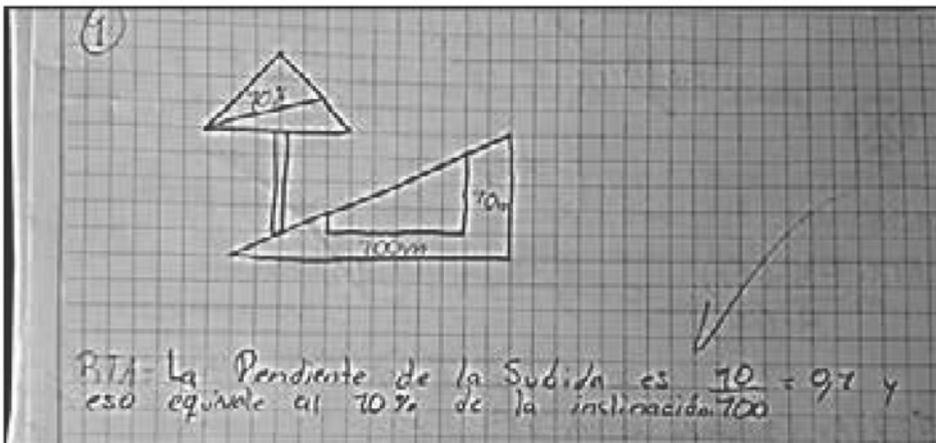
Fuente: respuesta E-4



Conceptualización R

Se identificó en el ítem 1, ^{once} 21 estudiantes, que corresponde al 80.76 %, incurrieron en el error $R_1 - e_3$, debido a un aprendizaje deficiente de hechos (ver figura 8). En el ítem 2, un estudiante, correspondiente al 3.84 %, incurrió en el error $R_2 - e_2$, con dificultades para obtener información espacial (ver figura 9). Por último, en el ítem 5, ^{cinco} cinco estudiantes, correspondientes al 19.23 %, incurrieron en el error $R_3 - e_3$, por falta de conocimiento para obtener un porcentaje, mostrando una dificultad en la representación de la pendiente como porcentaje (ver figura 10).

Figura 8. Evidencia del error tipo R_1, e_3



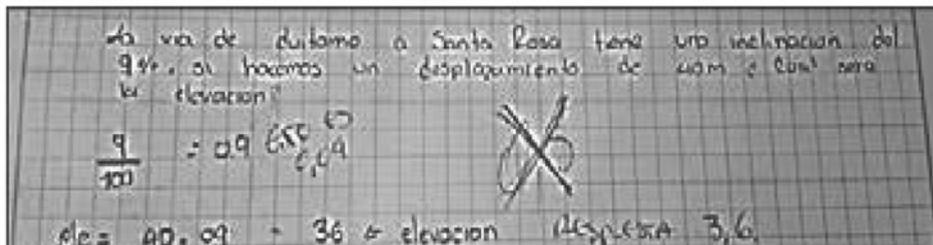
Fuente: respuesta E-6

Figura 9. Evidencia del error tipo R_2, e_2



Fuente: respuesta E-21

Figura 10. Evidencia del error tipo R_3, e_3



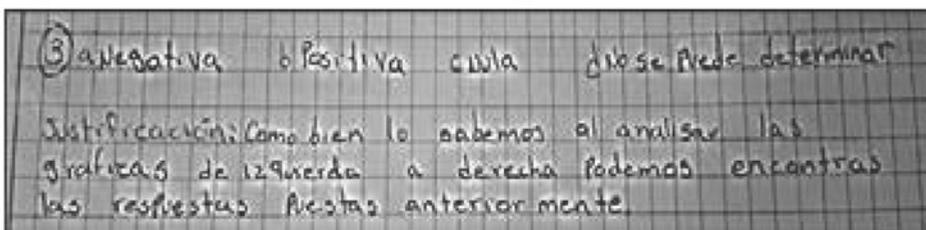
Fuente: respuesta E-4



Conceptualización B

Se identificó que en el ítem 3 cinco estudiantes, correspondientes al 19.23 %, incurrieron en el error $B_1 - e_3$, dos estudiantes, correspondientes al 7.7 %, incurrieron en el error $B_2 - e_3$ y por último, un 7.7%, correspondiente a dos estudiantes, en el error $B_3 - e_3$, mostrando deficiencia en la conceptualización de la pendiente como indicador de comportamiento, por consiguiente, no entienden cuando es creciente, decreciente o nula. Relacionado con el aprendizaje deficiente de hechos (ver figura 11).

Figura 11. Evidencia de los errores de tipo B_1, B_2 y B_3, e_3

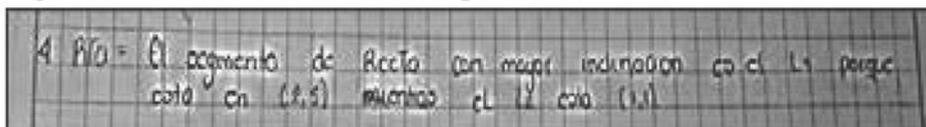


Fuente: respuesta E-7

Conceptualización L

Se identificó en el ítem 4, que 14 estudiantes, correspondiente al 42.30 %, incurrieron en el error $L_1 - e_3$, mostrando de esta manera que la pendiente como constante lineal es muy poco manejada debido a que no reconoce que la recta tiene la misma pendiente sin importar cuales dos puntos tome sobre ella, debido a un aprendizaje deficiente de concepto de linealidad (ver figura 12).

Figura 12. Evidencia del error de tipo L_1, e_3



Fuente: respuesta E-17

Conceptualización T

Se identificó en el ítem 7 que seis estudiantes, correspondientes al 23.1%, incurrieron en el error $T_1 - e_1$, no establece la relación de la recta y el ángulo que forma con la horizontal. $\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$, por falta de comprensión semántica del lenguaje matemático relacionado la pendiente (ver figura 13).



Figura 13. Evidencia del error tipo T_1, e_1

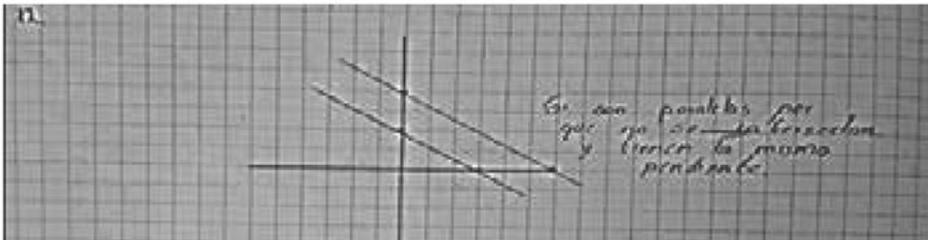


Fuente: respuesta E-5

Conceptualización D

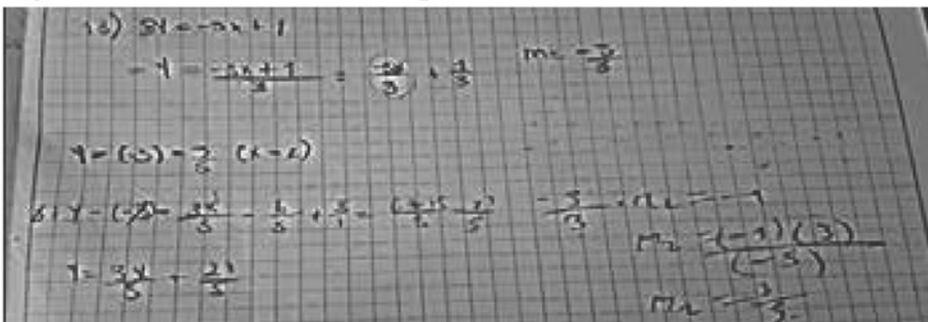
Se identificó en el ítem 12 el error $D_1 - e_B$, donde cuatro estudiantes, que corresponden al 15.38% del total de respuestas de dichos ítems, no asocian el valor de la pendiente como propiedad para definir paralelismo entre dos rectas. Por otro lado, los estudiantes no hallaron las pendientes de las rectas para comprobar que son iguales (ver figura 14). Además, en el ítem 13, el error $D_2 - e_B$, cuatro estudiantes, correspondientes al 15.38% del total de respuestas de estas situaciones problema, no asocian el valor de la pendiente como propiedad para definir perpendicularidad entre dos rectas; se evidenció el ejercicio incompleto, donde no se justificó que si dos rectas son perpendiculares el producto de las pendientes es -1 (ver figura 15).

Figura 14. Evidencia del error tipo D_1, e_B



Fuente: respuesta E-12

Figura 15. Evidencia del error tipo D_2, e_B



Fuente: respuesta E-3



Conclusiones

En el desarrollo del trabajo se evidenció que los estudiantes no conocen las conceptualizaciones de la pendiente como razón trigonométrica, debido a que no conciben la relación existente entre las funciones seno, coseno y tangente. Además, como propiedad determinante, no relacionan la dependencia que tienen las rectas con la pendiente para definir propiedades de paralelismo y perpendicularidad.

En la conceptualización F se identificó que el 19.23% de los estudiantes interpretan la pendiente en los datos del problema como una razón de cambio constante entre dos variables, es un porcentaje bajo; lo que indica que los participantes que no respondieron tienen deficiencia en conceptos previos para solucionar situaciones problemas con esta conceptualización.

En la conceptualización PC, en promedio 65,38% del total de las respuestas, los estudiantes relacionan la pendiente como el coeficiente paramétrico de la ecuación de la recta $y = mx + b$ y la ecuación de la recta $(y_2 - y) = m(x_2 - x)$.

Finalmente, se observó que un porcentaje significativo de estudiantes, en el desarrollo de la prueba diagnóstica, cometieron errores vinculados a procedimientos incompletos por *la falta de conocimientos algebraicos*; en las respuestas a las situaciones problema, *se encontró que carecían de sentido*.

Referencias

- ABREU BLAYA, R., DOLORES FLORES, C., SANCHEZ, J., Y SIGARRETA, J. M. (MARZO DE 2020). EL CONCEPTO DE PENDIENTE: ESTADO DE LA INVESTIGACIÓN Y PROSPECTIVAS. NÚMEROS, REVISTA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS, CIII, 81-98. [HTTP://WWW.SINEYTON.ORG/NUMEROS](http://www.sineyton.org/numeros)
- BRAVO BARLETTA, V. L., Y PATIÑO ECHEVERRÍA, J. C. (2016). ANÁLISIS DE LOS ERRORES DE LOS ALUMNOS EN EL CONCEPTO DE RECTA Y PLANO EN ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA. REVISTA ATLANTE: CUADERNOS DE EDUCACIÓN Y DESARROLLO. [HTTP://WWW.EUMED.NET/REV/ATLANTE/2016/11/RECTA.HTML](http://www.eumed.net/rev/atlante/2016/11/recta.html)
- DOLORES FLORES, C., Y MOSQUERA GARCÍA, G. A. (2022). CONCEPTUALIZACIONES DE LA PENDIENTE EN EL CURRÍCULO COLOMBIANO EN MATEMÁTICAS. EDUCACIÓN MATEMÁTICA, XXXIV(2), 217-244. [HTTPS://DOI.ORG/10.24844/EM3402.08](https://doi.org/10.24844/EM3402.08)
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2006). ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS. (M. D. NACIONAL, ED.) REVOLUCIÓN



EDUCATIVA COLOMBIA APRENDE, 46-95. [HTTPS://WWW.MINEDUCACION.GOV.CO](https://www.mineduccion.gov.co)

RICO, L. (1998). ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. EN J. KILPATRICK, P. GÓMEZ, Y L. RICO, ERRORES Y DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EVALUACIÓN HISTORIA (PÁGS. 69-108). BOGOTÁ: UNA EMPRESA DOCENTE. [HTTP://UED.UNIANDES.EDU.CO](http://ued.uniandes.edu.co)

ROMERO ARGÜELLO, B. (S.F.). ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE PENDIENTE EN EL CONTEXTO EDUCATIVO. SERES Y SABERES.

SOCAS, M. (2007). DIFICULTADES Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. ANÁLISIS DESDE EL ENFOQUE LÓGICO SEMIÓTICO. INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI, 19-52. [HTTPS://DIALNET.UNIRIOJA.ES](https://dialnet.unirioja.es)

SUAREZ SOTOMONTE, P., Y BERDUGO CELY, E. R. (2021). LO PENDIENTE DE LA PENDIENTE. VOCES Y REALIDADES EDUCATIVAS, VI(1), 181-193. [HTTPS://VOCESYREALIDADES EDUCATIVAS.COM/OJS/INDEX.PHP/VYC/ARTICLE/VIEW/12](https://vocesyrealidadeseducativas.com/ojs/index.php/vyc/article/view/12)

Forma de citar este artículo: Barrera Rodríguez, Y. López Cely, H. A. & Morales Gómez, G. E. (2022). Explorando el Objeto Matemático pendiente en Estudiantes de Educación Media, *Revista Voces y Realidades Educativas*, (9), pp. 79-96.
